

УДК 621.73

А. Л. Воронцов, В. К. Стратьев,  
В. П. Ступников

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЙ И УЧЕТ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ВНЕДРЕНИИ ПУАНСОНА В ТЕЛО БОЛЬШИХ ПОПЕРЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ. Ч. 2

*Определены напряженное и деформированное состояния материала тела больших поперечных размеров при вдавливании в него осесимметричного пуансона. Показана методика учета упрочнения деформируемого материала. Путем сопоставления с независимыми экспериментальными данными подтверждены достоверность и высокая точность полученных теоретических результатов.*

**E-mail:** mt13@bmstu.ru

**Ключевые слова:** внедрение пуансона в тело больших поперечных размеров, напряжение, напряжение текучести, накопленная деформация, упрочнение.

Продолжим математическое исследование задачи, сформулированной авторами в работе [1], где изложено начало решения.

Используем повышающее оценку силовых параметров (т.е. согласующееся с используемым методом верхней оценки; доказательство см. в работе [2, с. 172–173]) упрощенное условие пластичности

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_{\rho} = \sigma_s. \quad (1)$$

Из условия (34) работы [1] следует, что

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Подставив равенства (1) и (2), а также формулу (33) из работы [1] в уравнения равновесия (2) и (3), приведенные в работе [1], получим

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + 2 \frac{F(\rho)}{\rho} \cos \varphi - \frac{2\sigma_s}{\rho} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \varphi} + \left[ \rho \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + 3F(\rho) \right] \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Продифференцировав уравнение (3) по  $\varphi$ , а уравнение (4) по  $\rho$ , придем к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\rho}}{\partial \rho \partial \varphi} - 2 \frac{F(\rho)}{\rho} \sin \varphi = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} + \left[ \rho \frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + 4 \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} \right] \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (5), получаем уравнение

$$\left[ \rho \frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + 4 \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + 2 \frac{F(\rho)}{\rho} \right] \sin \varphi = 0, \quad (7)$$

которое после умножения на  $\rho$  и сокращения  $\sin \varphi$  получает вид

$$\rho^2 \frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + 4\rho \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + 2F(\rho) = 0. \quad (8)$$

Исследуем это однородное дифференциальное уравнение второго порядка, представив его структуру как

$$\varphi_1(\rho) \frac{\partial^2 F(\rho)}{\partial \rho^2} + \varphi_2(\rho) \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \varphi_3(\rho) F(\rho) = 0, \quad (9)$$

где  $\varphi_1(\rho) = \rho^2$ ,  $\varphi_2(\rho) = 4\rho$ ,  $\varphi_3(\rho) = 2$ .

Сначала находим

$$\frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial \rho} = 2\rho; \quad \frac{\partial^2 \varphi_1(\rho)}{\partial \rho^2} = 2; \quad \frac{\partial \varphi_2(\rho)}{\partial \rho} = 4. \quad (10)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \varphi_2(\rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \varphi_1(\rho)}{\partial \rho^2} = \varphi_3(\rho), \quad (11)$$

то, следовательно, уравнение (9) является уравнением в полных дифференциалах и может быть сведено к уравнению первого порядка, имеющему вид [3, с. 145]

$$\varphi_1(\rho) \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \left[ \varphi_2(\rho) - \frac{\partial \varphi_1(\rho)}{\partial \rho} \right] F(\rho) = C \quad (12)$$

или

$$\rho^2 \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + 2\rho F(\rho) = C, \quad (13)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Разделив уравнение (13) на  $\rho^2$ , получим линейное уравнение

$$\frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho} F(\rho) = \frac{C}{\rho^2}. \quad (14)$$

Это уравнение имеет структуру

$$\frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} + \Phi_1(\rho) F(\rho) = \Phi_2(\rho), \quad (15)$$

где  $\Phi_1(\rho) = 2/\rho$ ,  $\Phi_2(\rho) = C/\rho^2$ .

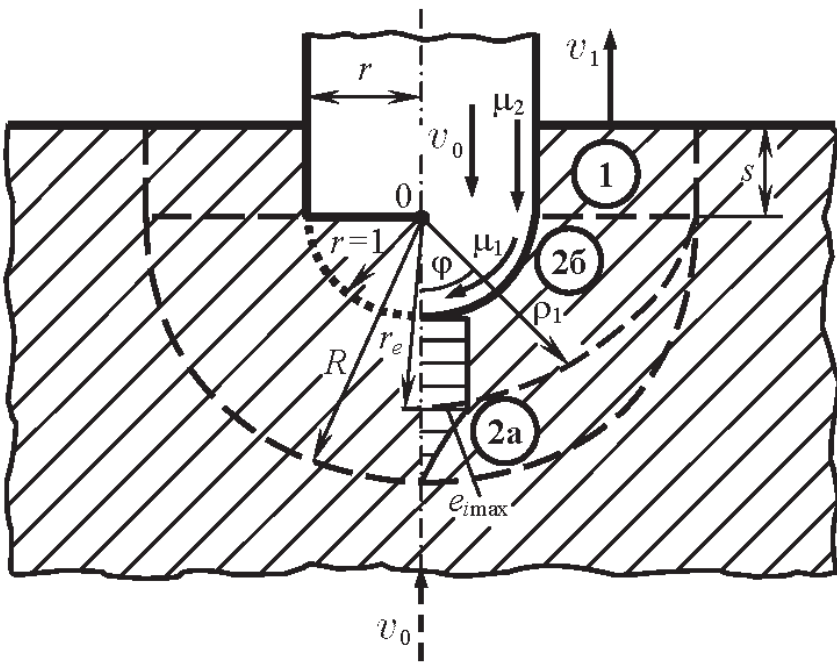


Рис. 1. Расчетная схема вдавливания пуансона с плоским (слева) или сферическим (справа) торцом в полупространство

Решение такого уравнения, как известно, имеет вид [3, с. 36]

$$F(\rho) = \Phi(\rho) \left[ \int \frac{\Phi_2(\rho)}{\Phi(\rho)} d\rho + C_1 \right], \quad (16)$$

где

$$\Phi(\rho) = e^{-\int \Phi_1(\rho) d\rho}.$$

С учетом этого можно записать

$$\Phi(\rho) = e^{-\int 2 \frac{d\rho}{\rho}} = e^{-2 \ln \rho} = \frac{1}{\rho^2}, \quad (17)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[ \int C d\rho + C_1 \right] = \frac{C\rho + C_1}{\rho^2}. \quad (18)$$

Подставив функцию (18) в равенство (33) из работы [1], найдем касательное напряжение

$$\tau_{\rho\varphi} = \frac{C\rho + C_1}{\rho^2} \sin \varphi. \quad (19)$$

Произвольные постоянные определяем из граничных условий (рис. 1)

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\varphi} &= \mu_1 \sigma_s \text{ при } \varphi = 90^\circ \text{ и } \rho = 1; \\ \tau_{\rho\varphi} &= -\sigma_s / \sqrt{3} \text{ при } \varphi = 90^\circ \text{ и } \rho = R, \end{aligned}$$

с учетом которых

$$C = -\sigma_s \frac{R^2 + 2\mu_1}{\sqrt{3}(R - 1)}; \quad (20)$$

$$C_1 = \sigma_s \frac{R(R + 2\mu_1)}{\sqrt{3}(R - 1)}. \quad (21)$$

При необходимости с помощью полученной формулы (19) и уравнения (33) (с учетом равенств (29)–(31)) из работы [1] можно конкретизировать функцию  $f(\rho)$ , получив явные поля скоростей, строго согласованные с касательными напряжениями и коэффициентом трения  $\mu_1$ .

Подставив равенство (18) в уравнение (3), получим

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + 2 \frac{C\rho + C_1}{\rho^3} \cos \varphi - \frac{2\sigma_s}{\rho} = 0, \quad (22)$$

откуда

$$\sigma_\rho = 2\sigma_s \ln \rho + \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \cos \varphi + f_4(\varphi) + C_2. \quad (23)$$

Подставив теперь равенство (18) в уравнение (4), получим

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \varphi} = - \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \sin \varphi, \quad (24)$$

откуда

$$\sigma_\rho = \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \cos \varphi + f_5(\rho) + C_2. \quad (25)$$

Сравнивая выражения (23) и (25), видим, что

$$\begin{aligned} f_4(\varphi) &= 0, \\ f_5(\rho) &= 2\sigma_s \ln \rho. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом этого

$$\sigma_\rho = 2\sigma_s \ln \rho + \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \cos \varphi + C_2. \quad (27)$$

Из условия пластичности (1)

$$\sigma_\varphi = \sigma_s + 2\sigma_s \ln \rho + \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \cos \varphi + C_2. \quad (28)$$

Произвольную постоянную  $C_2$  находим из граничного условия  $\sigma_\varphi = q_c$  при  $\varphi = 90^\circ$  и  $\rho = 1$ :

$$C_2 = q_c - \sigma_s. \quad (29)$$

Дадим небольшое пояснение. В силу того что выражение (28) зависит от координаты  $\rho$ , удовлетворить условие  $\sigma_\varphi = q_c$  во всех точках горизонтальной границы между областями **1** и **2** невозможно. Поэтому с учетом предстоящей минимизации силы процесса в целях нахождения радиуса  $R$ , для обеспечения равенства мы выбрали точку  $\rho = 1$ , исключив тем самым вхождение в произвольную постоянную  $C_2$  громоздких выражений, содержащих искомый параметр  $R$ . В принципе,

использование иной точки соблюдения граничного условия, например, срединной точки  $\rho = (R + 1)/2$ , никаких математических затруднений не вызывает, но, не давая существенного изменения окончательных расчетных результатов, делает завершающие формулы более громоздкими.

С учетом равенства (29) из выражения (27) запишем

$$\sigma_\rho = 2\sigma_s \ln \rho + \frac{2C\rho + C_1}{\rho^2} \cos \varphi - \sigma_s + q_c. \quad (30)$$

На контактной поверхности пуансона нормальное напряжение

$$\sigma_\rho|_{\rho=1} = (2C + C_1) \cos \varphi - \sigma_s + q_c, \quad (31)$$

а касательное напряжение с учетом выражений (19)–(21) имеет вид

$$\tau_{\rho\varphi}|_{\rho=1} = \mu_1 \sigma_s \sin \varphi. \quad (32)$$

Сила вдавливания определяется выражением

$$P = \pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( |\sigma_\rho|_{\rho=1}| \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi}|_{\rho=1} \sin \varphi \right) d\varphi. \quad (33)$$

Интегрируя выражение (33) с учетом формул (31), (32), а также равенств (20), (21) и формулы (17) из работы [1], находим

$$P = \sigma_s \pi r^2 \left\{ 1 + 0,385 \left[ \frac{R(R + 2\mu_1)}{R - 1} + \frac{(3R + 5, 2\mu_2)s}{R^2 - 1} \right] \right\}. \quad (34)$$

Удельная деформирующая сила определяется как

$$q = \frac{P}{\pi r^2} = \sigma_s \left\{ 1 + 0,385 \left[ \frac{R(R + 2\mu_1)}{R - 1} + \frac{(3R + 5, 2\mu_2)s}{R^2 - 1} \right] \right\}. \quad (35)$$

Для анализа деформированного состояния переносную систему координат, связанную с торцом пуансона, считаем условно неподвижной, полагая, что металл, расположенный под нижней границей очага пластической деформации, движется навстречу пуансону со скоростью  $v_0$  (показана штриховой линией на рис. 1). Влиянием угловых сдвигов на накопленную деформацию пренебрегаем. В области **2** скорости течения частиц металла задаем наиболее простыми выражениями, удовлетворяющими граничным условиям и условию несжимаемости:

$$\begin{aligned} v_\rho &= -v_0 \frac{\rho - 1}{R - 1} \cos \varphi; \\ v_\varphi &= v_0 \frac{3\rho - 2}{2(R - 1)} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя выражения (36) в равенства (10)–(12) из работы [1], находим скорости деформаций:

$$\begin{aligned}\xi_\rho &= -\frac{v_0}{R-1} \cos \varphi; \\ \xi_\varphi &= \xi_\theta = \frac{v_0}{2(R-1)} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{37}$$

после чего по соотношению (8) [1] находим интенсивность скоростей деформации:

$$\xi_i = \frac{v_0}{R-1} \cos \varphi.\tag{38}$$

Полагая, что накопленная деформация  $e_i$  в явном виде зависит только от координаты  $\rho$ , из известного выражения для определения накопленных деформаций по А.А.Ильюшину [2, с. 175] получаем уравнение

$$\xi_i = v_\rho \frac{\partial e_i}{\partial \rho},\tag{39}$$

откуда после подстановки выражений (36) и (38) с учетом начального условия  $e_i = 0$  при  $\rho = \rho_0$  находим

$$e_i = \ln \frac{\rho_0 - 1}{\rho - 1}.\tag{40}$$

Проинтегрировав выражение  $d\rho = v_\rho dt$ , учитывая первую формулу из (36) и начальное условие  $\rho = \rho_0$  при  $s = 0$ , можно найти зависимость между начальными и текущими координатами материальной точки:

$$\rho = 1 + (\rho_0 - 1)e^{-\frac{s}{R-1} \cos \varphi},\tag{41}$$

где  $e$  — основание натурального логарифма.

В области **2**, где сосредоточены пластические деформации, можно выделить две зоны с различным деформированным состоянием (см. рис. 1, справа): зону **2а**, в которую постоянно вовлекаются свежие частицы металла, каждая из которых проходит через нижнюю границу радиуса  $R$ , и зону **2б**, в которой сосредоточены частицы, находившиеся в очаге пластической деформации в момент начала вдавливания. Уравнение границы между этими двумя зонами можно найти с помощью выражения (41), подставив в него  $\rho_0 = R$ :

$$\rho_1 = 1 + (R - 1)e^{-\frac{s}{R-1} \cos \varphi}.\tag{42}$$

На оси симметрии, т.е. при  $\varphi = 0$ , положение границы определяется радиусом

$$r_e = 1 + (R - 1)e^{-\frac{s}{R-1}}.\tag{43}$$

С учетом того что для любой частицы металла, расположенной в зоне **2а**, начальной координатой являлась координата  $\rho_0 = R$ , из формулы (40) находим выражение для определения накопленной деформации в этой зоне:

$$e_i = \ln \frac{R - 1}{\rho - 1}. \quad (44)$$

Чтобы определить накопленные деформации в зоне **2б**, надо подставить в формулу (40) выражение (41):

$$e_i = \frac{s}{R - 1} \cos \varphi. \quad (45)$$

На оси симметрии, т.е. при  $\varphi = 0$ , из формулы (45) получаем

$$e_{i1} = e_{i \max} = \frac{s}{R - 1}. \quad (46)$$

Эпюра накопленных деформаций на оси симметрии показана на рис. 1. С достаточной точностью можно принять, что в зоне **2а** накопленная деформация изменяется линейно. Тогда средняя накопленная деформация на оси симметрии с учетом формул (43) и (46) будет равна

$$e_i = \frac{e_{i1}(r_e - 1) + 0,5e_{i1}(R - r_e)}{R - 1} = 0,5 \left( 1 + e^{-\frac{s}{R-1}} \right) \frac{s}{R - 1}. \quad (47)$$

Для упрощения примем аналогично работе [4], что средняя накопленная деформация на оси симметрии (47) определяет среднее значение накопленной деформации во всем очаге пластической деформации. С учетом этого можно найти среднее по очагу деформации напряжение текучести и по формуле (35) вычислить удельную силу, необходимую для вдавливания в упрочняющийся материал.

Радиус  $R$ , определяющий очаг пластической деформации, находим из условия минимума удельной деформирующей силы. При  $s = 0$  из условия  $\partial q / \partial R = 0$  с учетом выражения (35) получаем, что

$$R_0 = 1 + \sqrt{1 + 2\mu_1}. \quad (48)$$

при  $\mu_1 = 0,5$  начальный радиус  $R_0 = 2,414$ .

Численная минимизация при  $s > 0$  показала, что по мере увеличения хода вдавливания  $s$  радиус  $R$ , определяющий внешний размер очага пластической деформации, увеличивается по зависимости

$$R = 1 + \sqrt{1 + 2\mu_1} + 0,48s + k_y(2 - e^{-s} - e^{-5s}). \quad (49)$$

Если пуансон имеет рабочий торец в форме полусферы (см. рис. 1, справа), то в формулы следует подставлять значения  $\mu_1$ , руководствуясь рекомендациями раздела 3.2 монографии [2] или работы [5]. При любой другой форме торца пуансона, вписывающейся в полусферу, в упомянутые формулы следует подставлять  $\mu_1 = 0,5$ , поскольку, как было указано ранее, в этом случае под торцом пуансона образуется

застойная зона в виде полусферы, являющаяся как бы продолжением пуансона, нивелирующим конкретный вид его торца.

*Пример 1.* Определить изменение удельной силы по ходу холодного выдавливания полой толстостенной детали из армко-железа с пределом текучести 230 МПа пуансоном с плоским торцом и сравнить расчетные значения с экспериментальными, приведенными в табл. 1 (соответствуют рис. 46, с. 250 работы [4]; дополнительно укажем, что данные экспериментальные результаты приведены и на рис. 51, с. 441 справочника [6]).

Таблица 1

**Сравнение результатов расчета удельной силы холодного выдавливания полой толстостенной детали из армко-железа с экспериментальными данными**

$s$	$R$	$e_i$	$\sigma_s$ , МПа	$q$ , МПа	$q_3$ , МПа	$\delta$ , %
0,0	2,41	0,000	230	746	750	0,5
0,2	3,28	0,084	327	1130	1050	7,1
1,0	4,44	0,254	472	1882	1850	1,7
2,0	5,15	0,390	550	2429	2450	0,9
3,0	5,71	0,487	590	2817	2850	1,2
4,0	6,22	0,561	614	3128	3000	4,1

*Решение.* Поскольку торец пуансона плоский, то принимаем  $\mu_1 = 0,5$  и  $\mu_2 = 0,1$ . В соответствии с разделом 3.1 монографии [2] используем коэффициент упрочнения  $k_y = 0,95$ . Напряжение текучести, МПа, армко-железа определяем по аппроксимации

$$\sigma_s = 610 + 520e^{-e_i} - 900e^{-2e_i},$$

полученной для кривой упрочнения 1, показанной на рис. 37, с. 52 [7]. Последовательно используя формулы (49), (47) и (35), находим результаты, представленные в табл. 1.

*Пример 2.* Определить изменение удельной силы по ходу холодного выдавливания полой толстостенной детали из стали 15 пуансоном с плоским торцом и сравнить расчетные значения с экспериментальными, приведенными в табл. 2 (соответствуют рис. 22, с. 299 справочника [8]; дополнительно укажем, что данные экспериментальные результаты совпадают и с приведенными на рис. 54, показанном на с. 449 справочника [6]).

*Решение.* Поскольку торец пуансона плоский, то принимаем  $\mu_1 = 0,5$  и  $\mu_2 = 0,1$ . Опять используем коэффициент упрочнения  $k_y = 0,95$ . Определение напряжения текучести, МПа, стали 15 проводим по аппроксимации

$$\sigma_s = 790 + 260e^{-e_i} - 750e^{-2e_i},$$



**Сравнение результатов расчета удельной силы холодного выдавливания полой толстостенной детали из стали 15 с экспериментальными данными**

$s$	$R$	$e_i$	$\sigma_s$ , МПа	$q$ , МПа	$q_3$ , МПа	$\delta$ , %
0,00	2,41	0,000	300	973	1000	2,7
0,35	3,65	0,124	434	1560	1500	3,9
0,75	4,20	0,210	508	1958	2000	2,1
1,50	4,82	0,329	589	2482	2500	0,7
2,25	5,29	0,417	636	2870	2800	2,4
2,60	5,49	0,452	652	3023	3000	0,8

полученной для кривой упрочнения 4, показанной на рис. 37, с. 52 из работы [7]. Последовательно используя формулы (49), (47) и (35), находим результаты, представленные в табл. 2.

Подчеркнем, что использованные нами в примерах 1 и 2 аппроксимации применялись в целях облегчения автоматизированного выполнения расчетов с помощью ЭВМ. Те же самые результаты можно получить и без данных аппроксимаций, переводя найденные накопленные деформации в относительные и выбирая соответствующие им значения напряжений текучести непосредственно с указанных кривых упрочнения. Продемонстрируем такой путь вычислений в двух следующих примерах.

*Пример 3.* Определить изменение удельной силы по ходу холодного выдавливания полой толстостенной детали из отожженной стали 10 пуансоном с плоским торцом и сравнить расчетные значения с экспериментальными, приведенными в табл. 3 (соответствуют рис. 51, с. 441 справочника [6]).

Таблица 3

**Сравнение результатов расчета удельной силы холодного выдавливания полой толстостенной детали из отожженной стали 10 с экспериментальными данными**

$s$	$R$	$e_i$	$e$	$\sigma_s$ , МПа	$q$ , МПа	$q_3$ , МПа	$\delta$ , %
0,4	3,74	0,136	0,127	460	1670	1600	4,2
0,8	4,25	0,219	0,197	530	2059	1950	5,3
1,2	4,60	0,286	0,249	570	2328	2250	3,4
2,0	5,15	0,390	0,323	600	2652	2600	2,0
2,8	5,60	0,470	0,375	620	2920	2900	0,7

*Решение.* Поскольку торец пуансона плоский, то принимаем  $\mu_1 = 0,5$  и  $\mu_2 = 0,1$ . Опять используем коэффициент упрочнения  $k_y = 0,95$ . Определение напряжения текучести отожженной стали 10

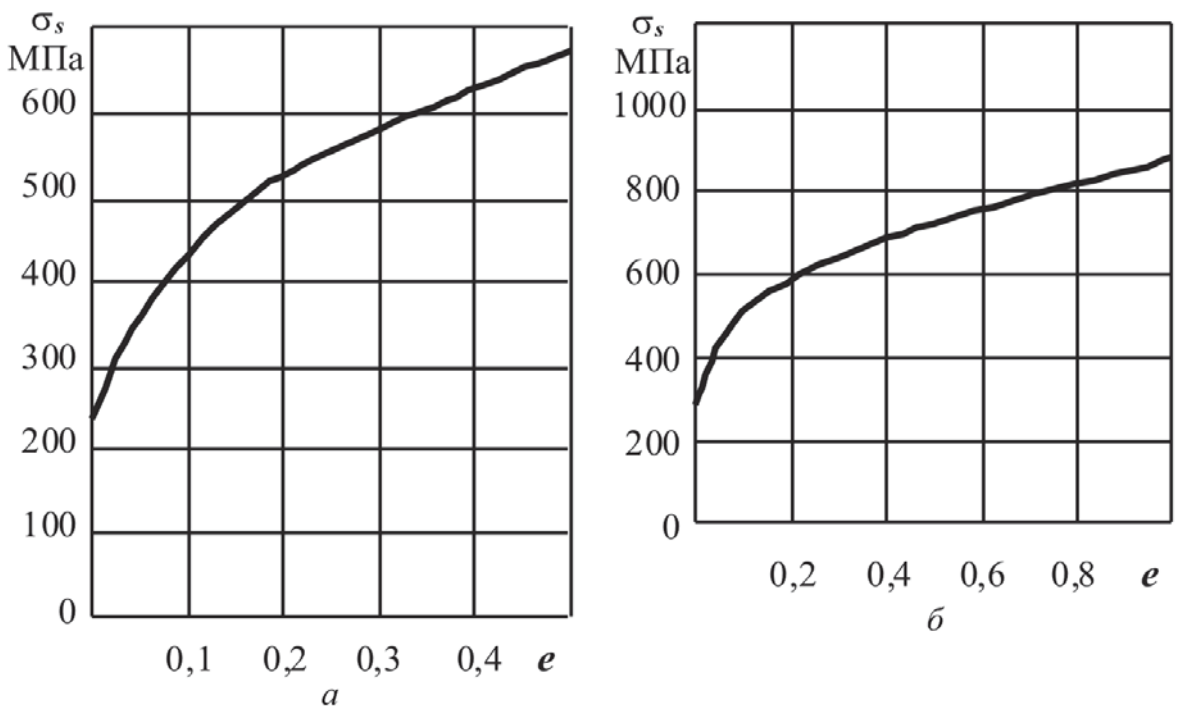


Рис. 2. Кривая упрочнения отожженных сталей 10 (а) и 20 (б)

проводим по кривой упрочнения, на рис. 2, а (соответствует кривой упрочнения 5, показанной на рис. 31, с. 62 справочника [6]). Последовательно, используя формулы (49), (47) и (35), а также формулу для условной относительной деформации (для которой была построена кривая упрочнения в справочнике)

$$e = 1 - e^{-e_i}, \quad (50)$$

получаем результаты, представленные в табл. 3.

*Пример 4.* Определить изменение удельной силы по ходу холодного выдавливания полой толстостенной детали из отожженной стали 20 пуансоном с плоским торцом и сравнить расчетные значения с экспериментальными, приведенными в табл. 4 (соответствуют рис. 51, с. 441 справочника [6]).

*Решение.* Поскольку торец пуансона плоский, то принимаем  $\mu_1 = 0,5$  и  $\mu_2 = 0,1$ . Снова используем коэффициент упрочнения  $k_y = 0,95$ . Определение напряжения текучести отожженной стали 20 проводим по кривой упрочнения, приведенной на рис. 2, б (соответствуют рис. 31, с. 62 справочника [6]). Последовательно используя формулы (49), (47) и (35), а также формулу (50), находим результаты, представленные в табл. 4.

Вдавливание пуансона со сферическим торцом на начальном этапе требует специального рассмотрения (рис. 3). В этом случае форма внедренной части торца в начальный момент близка к плоской и до момента полного внедрения будет дополняться образующейся застойной зоной, в связи с чем можно использовать уже полученные формулы, сделав в них соответствующие изменения.

**Сравнение результатов расчета удельной силы холодного выдавливания  
полой толстостенной детали из отожженной стали 20 с экспериментальными  
данными**

$s$	$R$	$e_i$	$e$	$\sigma_s$ , МПа	$q$ , МПа	$q_3$ , МПа	$\delta$ , %
0,4	3,74	0,136	0,127	500	1816	1750	3,6
0,8	4,25	0,219	0,197	600	2331	2150	7,8
1,2	4,60	0,286	0,249	620	2532	2400	5,2
2,0	5,15	0,390	0,323	650	2873	2800	2,5
2,2	5,26	0,412	0,338	660	2967	2900	2,3

Во-первых, нужно принять во внимание, что на данном этапе область **1** (см. рис. 1) будет отсутствовать, т.е. надо убрать соответствующие члены в формулах (35) и (49), положив в них  $s = 0$ .

Во-вторых, нужно принять во внимание, что на начальном этапе удельная сила  $q$  будет приложена на радиусе  $r_H$ , в связи с чем удельная сила на этом этапе, приходящаяся на наибольший радиус пуансона  $r = 1$ , определяется выражением

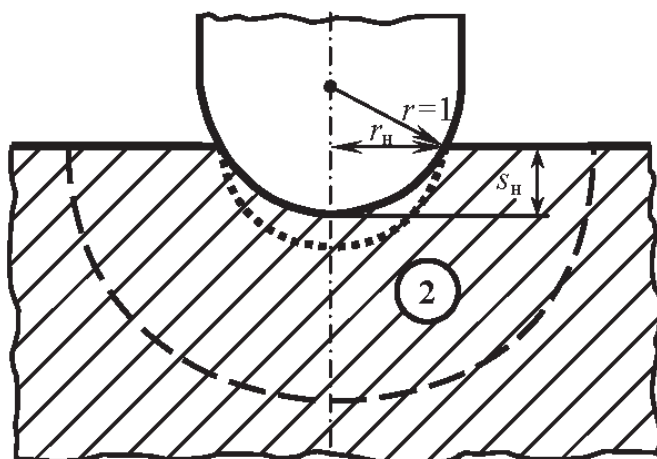
$$q_H = \frac{r_H}{r} q = r_H q. \quad (51)$$

По теореме Пифагора текущее значение ширины

$$r_H = \sqrt{1 - (1 - s_H)^2}, \quad (52)$$

где  $s_H$  — глубина внедрения на начальном этапе.

В-третьих, с учетом наличия застойной зоны, в принципе, следует подставить в формулы (35) и (49)  $\mu_1 = 0,5$ . Однако в случае, если на поверхности самого пуансона коэффициент трения  $\mu_1$  меньше 0,5, такая подстановка приведет к разрыву теоретической кривой изменения удельной силы в момент завершения внедрения торца, т.е. при  $s_H = 1$ , из-за нестыковки формул с разными коэффициентами трения: 0,5 и  $\mu_1$ . Поэтому для обеспечения гладкой кривой теоретического измене-



**Рис. 3. Расчетная схема начального этапа вдавливания пуансона со сферическим торцом в полупространство**

ния силы лучше с самого начала и до конца процесса вдавливания использовать одно и то же значение  $\mu_1$ .

С учетом этих замечаний формулы (35) и (49) для расчета удельной силы на начальной стадии внедрения примут вид

$$q_H = \sigma_s \sqrt{1 - (1 - s_H)^2} \left[ 1 + \frac{0,385R(R + 2\mu_1)}{R - 1} \right]; \quad (53)$$

$$R = 1 + \sqrt{1 + 2\mu_1}. \quad (54)$$

После полного внедрения сферического торца, т.е. при  $s_H = 1$ , следует переходить на расчет по формулам (35) и (49).

Ввиду подтвержденной высокой точности полученных расчетных формул их можно рекомендовать для применения в расчетах технологических операций вдавливания осесимметричного пуансона в заготовки больших поперечных размеров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов А. Л., Стратьев В. К., Ступников В. П. О пробе Бригелля и внедрении пуансона в тело больших поперечных размеров // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2012. – № 2. – С. 12–21.
2. Воронцов А. Л. Технологические задачи теории пластичности. Т. 1. – М.: Машиностроение, 2006. – 474 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. – Л.: Машиностроение, 1978. – 368 с.
5. Воронцов А. Л. Выбор коэффициентов трения в расчетах процессов выдавливания // Производство проката. – 2003. – № 4. – С. 2–5.
6. Холодная объемная штамповка: Справочник / Под ред. Г.А. Навроцкого. – М.: Машиностроение, 1973. – 496 с.
7. Кроха В. А. Кривые упрочнения металлов при холодной деформации. – М.: Машиностроение, 1968. – 131 с.
8. Ковка и штамповка: Справочник / Под ред. Е.И. Семенова. Т. 3. Холодная объемная штамповка / Под ред. Г.А. Навроцкого. – М.: Машиностроение, 1987. – 384 с.

Статья поступила в редакцию 18.10.2011

Андрей Львович Воронцов родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1978 г. Заслуженный деятель науки РФ, д-р техн. наук, профессор кафедры “Технологии обработки материалов” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 420 научных работ в области прикладной теории пластичности, обработки металлов давлением и обработки резанием.

A.L. Vorontsov (b. 1955) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1978. D. Sc. (Eng.), professor of “Technologies of Treatment of Materials” department of the Bauman Moscow State Technical University, Honored Scientist of the Russian Federation. Author of 420 publications in the field of applied theory of plasticity, noncutting shaping of metals and treatment by cutting.

Владимир Петрович Ступников родился в 1954 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1980 г. Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Технологии обработки материалов” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 40 научных работ в области обработки металлов давлением.

V.P. Stupnikov (b. 1954) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1980. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Technologies of Treatment of Materials” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 40 publications in the field of noncutting shaping of metals.

Валерий Константинович Стратьев родился в 1951 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1974 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Технологии обработки материалов” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 50 научных работ в области обработки металлов давлением.

V.K. Strat'ev (b. 1951) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1974. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Technologies of Treatment of Materials” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 50 publications in the field of noncutting shaping of metals.