УДК 624.07:534

НЕОРДИНАРНЫЙ ПРИМЕР РЕАКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СИНУСОИДАЛЬНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Г.М. Тушева, **О.Н. Тушев**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: sm2@bmstu.mail.ru

Рассмотрены стационарные изгибно-крутильные колебания прямолинейного стержня в линейной постановке. Показано, что крутильные колебания этого простого объекта происходят с частотой, отличной от частоты возбуждения, в окрестности некоторого постоянного угла закрутки, неравного нулю. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: изгиб, кручение, линейная система, синусоидальное воздействие, стационарное решение, частота, угол закрутки.

PECULIAR EXAMPLE OF RESPONSE OF LINEAR ELASTIC DYNAMICAL SYSTEM TO SINUSOIDAL EXCITATION

G.M. Tusheva, **O.N. Tushev**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: sm2@bmstu.mail.ru

The stationary flexural-and-torsional vibrations of a rectilinear rod are considered in the linear statement. It is shown that the torsional vibrations of this simple object occur at a frequency, differing from the excitation frequency, near a certain constant nonzero torsion angle. Results are illustrated by an example.

Keywords: flexure, torsion, linear system, sinusoidal excitation, stationary solution, frequency, torsion angle.

Рассмотрим малые изгибно-крутильные колебания упругого призматического стержня при синусоидальном аддитивном воздействии. Очевидно, что формализация и решение этой задачи сложности не представляют. Априори на качественном уровне также, на первый взгляд, очевидным является факт, что ответом любой, в том числе и рассматриваемой стационарной линейной системы является синусоида с частотой внешнего воздействия, разумеется, при игнорировании переходного процесса. Тем не менее, как будет показано далее, это не соответствует действительности. Отметим, что этот эффект носит чисто внешний, формальный характер и свойства линейных систем безусловно не нарушаются. Таким образом, название статьи носит несколько провокационный характер.

Более сорока лет назад постановку этой простой, но оригинальной задачи предложил академик В.Н. Челомей. На наш взгляд, она представляет определенный интерес и может быть использована в учебной литературе по теории колебаний и динамике конструкций, а также в технических устройствах, где этот эффект может себя проявить.

Объектом исследования является призматический стержень. Для упрощения будем считать, что изгиб стержня происходит только в одной плоскости, а в ортогональной — он является абсолютно жестким. Отметим также, что поперечное сечение стержня может отличаться от прямоугольного и выбрано таковым для определенности.

На рис. 1 в качестве примера изображен консольно закрепленный стержень длиной l прямоугольного сечения. При этом высота сечения существенно меньше ширины и на рис. 1 условно не показана. К стержню приложена распределенная нагрузка

$$f(z,t) = u(z)\sin pt \tag{1}$$

под углом α к оси y, при этом $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, стержень совершает изгибные колебания в плоскости xoz и крутильные — вокруг оси z. Считается, что линейные перемещения x и угловые φ малы, а также $\varphi \ll \alpha$.

На рис. 2 изображены перемещения стержня в сечении по оси z. Уравнение изгибных колебаний стержня с учетом соотношения (1) и

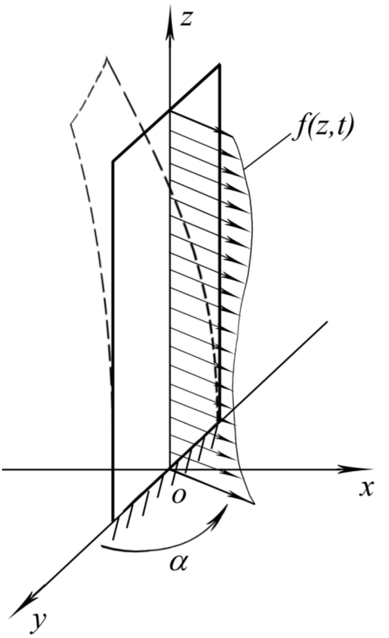

Рис. 1. Схема нагружения стержня

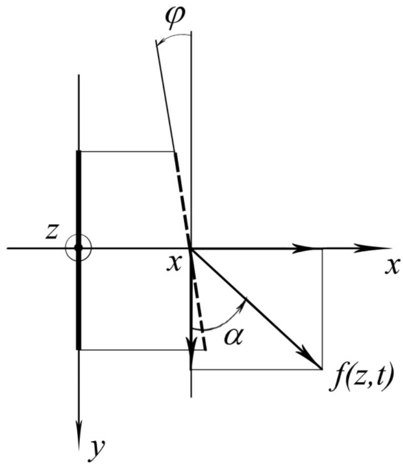

Рис. 2. Перемещения и усилия в сечении *z*

принятых допущений запишем в следующем виде [1]:

$$F\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + EJ_x\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = u(z)\sin\alpha\sin pt,$$

где F, ρ, EJ_x — площадь поперечного сечения стержня, плотность материала и изгибная жесткость стержня соответственно.

Вынужденные стационарные изгибные колебания происходят с частотой возмущающей силы p:

$$x(z,t) = v(z)\sin\alpha\sin pt, \tag{2}$$

где $v(z)$ — форма вынужденных колебаний, которую несложно определить известным способом с привлечением конкретных граничных условий.

Теперь найдем возмущающий крутящий момент $\Phi(z,t)$ в сечении z, суммируя моменты от внешней нагрузки $u(z)\cos\alpha\sin pt$ на отрезке $[z,l]$:

$$\Phi(z,t) = \cos\alpha\sin pt\int_z^l [x(z') - x(z)]u(z')dz'. \tag{3}$$

Тогда, с учетом выражений (2) и (3) и тригонометрических формул получим следующее уравнение крутильных колебаний:

$$\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{4}R(z)\sin 2\alpha(1-\cos 2pt), \tag{4}$$

где GJ_p — крутильная жесткость, $R(z) = \int_z^l [v(z') - v(z)]u(z')dz'$.

Из уравнения (4) следует, что крутильные колебания происходят с частотой $2p$ относительно некоторого постоянного по времени угла $\varphi_1(z) \neq 0$, за исключением “экзотического” случая, когда $u(z)$ специально подобрана.

Для примера обратимся к простейшей постановке задачи, которая тем не менее сохраняет суть изучаемого явления. Рассмотрим модель консольно закрепленного стержня (см. рис. 1). Считаем, что его масса сконцентрирована на верхнем торце. Таким образом, стержень трансформируется в невесомую пружину с теми же жесткостными характеристиками, что и у стержня. На пружине закреплен объект, имеющий массу m и момент инерции J_z, размерами которого можно пренебречь. В отличие от силового воздействия, которое рассматривалось в предыдущем случае, считаем, что основание стержня перемещается под углом α к оси y по закону $f(t) = a\sin pt$.

Запишем уравнения для линейных (x) и угловых (φ) перемещений объекта в подвижной системе координат, переход к которой из инерциальной системы осуществляется приложением к объекту переносной силы инерции $-m\ddot{f}(t)$. В результате простых преобразований получим

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = ap^2 \sin\alpha \sin pt, \tag{5}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2 \varphi = \frac{m}{J_z} ap^2 x \cos\alpha \sin pt, \tag{6}$$

где $\omega_1^2 = \dfrac{c}{m}$; $\omega_2^2 = \dfrac{k}{J_z}$; c, k — изгибная и крутильная жесткости пружины.

Стационарное решение уравнения (5) можно записать в следующем виде[1]:

$$x(t) = \frac{ap^2 \sin\alpha}{\omega_1^2 - p^2} \sin pt. \tag{7}$$

Подстановка решения (7) в уравнение (6) дает

$$\ddot{\varphi} + \omega_2^2 \varphi = \frac{m}{4J_z} \frac{a^2 p^4}{\omega_1^2 - p^2} \sin 2\alpha (1 - \cos 2pt).$$

Следовательно, угловое перемещение состоит из двух слагаемых:

$$\varphi_1 = \frac{m}{4J_z} \frac{a^2 p^4}{\omega_2^2(\omega_1^2 - p^2)} \sin 2\alpha,$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{m}{4J_z} \frac{a^2 p^4 \sin 2\alpha}{(\omega_1^2 - p^2)(\omega_2^2 - 4p^2)} \cos 2pt.$$

Видно, что φ_1 и $\varphi_2(t)$ имеют максимальные значения при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Статья поступила в редакцию 31.10.2011

[1] П а н о в к о Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.