

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.374; 539.389.2

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ К ОПИСАНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Б.М. Пахомов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: pahomovb@sm.bmstu.ru

Предложена модель нелинейного деформирования разносопротивляющихся материалов, основанная на схеме разделения обобщенной жесткости на жесткость, определяющую наличие связей между различными направлениями деформирования, и собственную жесткость. Получено новое условие начала пластического течения для материалов, имеющих разные значения пределов текучести при растяжении и сжатии. В пространстве главных напряжений это условие определяет эллипсоид вращения со смещенным относительно начала координат центром. Представленная модель позволяет описать нелинейное поведение таких материалов, которые в упругой области работают как обычные, но имеют разные пределы текучести и разные диаграммы деформирования в неупругой зоне при растяжении и сжатии.

Ключевые слова: схема разделения обобщенной жесткости, условие текучести, деформационная модель, разносопротивляемость.

APPLICATION OF INHERENT STRESS THEORY TO ANALYSIS OF NON-LINEAR DEFORMATION OF MATERIALS WITH MULTIMODULUS BEHAVIOUR

B.M. Pakhomov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pahomovb@sm.bmstu.ru

A model of non-linear deformation of materials is suggested. The model is based on the decomposition of generalized stiffness on the stiffness defining connections between different deformation directions, and self-stiffness. New condition of plastic flow beginning is obtained for materials with different yield points under tension and compression loads. This condition defines in the space of principal stresses an ellipsoid of rotation with rotational center shifted from the beginning of coordinates. The suggested model allows to describe nonlinear behavior of materials working in elastic domain as conventional materials but having different yield stresses and deformation diagrams in non-elastic domain under tensile and compressing loads.

Keywords: decomposition of generalized stiffness, plastic flow condition, deformation model, multimodulus behaviour.

Материалы, по-разному реагирующие на растягивающие и сжимающие нагрузки, условно можно разделить на две группы. Одни материалы можно называть разномодульными. Диаграмма растяжение–сжатие у них возле нулевой точки обычно имеет резко нелинейный

характер. Эти диаграммы хорошо аппроксимируются двумя прямыми, исходящими из нуля под разными углами к координатным осям. Примером материалов с такими свойствами могут служить многие композиционные материалы типа углепластиков, углерод-углеродные композиты и материалы, имеющие пористую структуру [1, 2].

Ко второй группе можно отнести такие материалы, которые до определенных уровней напряжений ведут себя как обычные изотропные линейно-упругие среды, одинаково реагирующие на растягивающие и сжимающие нагрузки, но при этом имеют разные значения пределов текучести и прочности при растяжении и сжатии и разные диаграммы деформирования в неупругой области. К ним можно отнести некоторые металлы и полимеры. В работах [3–5] приведены экспериментальные данные и модели, описывающие поведение таких материалов при сложном напряженном состоянии. В настоящей работе речь будет идти только о материалах второй группы. Будем называть их разносопротивляющимися.

Предлагаемая в настоящей работе модель основана на схеме разделения обобщенной жесткости материала на жесткость, определяющую связи между различными направлениями деформирования, и так называемую собственную жесткость, т.е. обобщенную жесткость материала, лишенного этих связей. Основные положения этой схемы изложены в работах [6, 7].

Под направлениями деформирования в данном случае понимаются растяжение, сжатие по осям x , y , z и сдвиги в плоскостях xy , yz и zx . Математическая формулировка такого разделения может быть представлена на примере записи закона Гука для изотропного, линейно-упругого тела в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \bar{G}_0 \varepsilon_{ij} + L \varepsilon \delta_{ij}, \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; $\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$; δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = x, y, z$. Параметры \bar{G}_0 и L , называемые собственным модулем и модулем связи, в дальнейшем считаются основными характеристиками среды. С техническими характеристиками материала эти параметры связаны очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{G}_0 &= \frac{E}{1 + \nu}, & L &= \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \\ E &= \frac{\bar{G}_0(\bar{G}_0 + 3L)}{\bar{G}_0 + 2L}, & \nu &= \frac{L}{\bar{G}_0 + 2L}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Также вводятся некоторые новые понятия: собственные напряжения p_{ij} и напряжения связи Q , определяемые по следующим формулам:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \bar{G}_0 \varepsilon_{ij}; \\ Q &= L\varepsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{2} p_{ij} p_{ij}} \quad (4)$$

— интенсивность собственных напряжений;

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} p_{ij} \varepsilon_{ij}; \\ U_Q &= \frac{1}{2} Q\varepsilon \end{aligned} \quad (5)$$

— энергия собственных напряжений или просто собственная энергия U_p и энергия связи U_Q .

Под интенсивностью деформаций в данном случае будем понимать величину $\bar{\varepsilon}_i$, определяемую по формуле

$$\bar{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}. \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжений при этом равны сумме собственных напряжений и напряжений связи

$$\sigma_{ij} = p_{ij} + Q\delta_{ij}, \quad (7)$$

а удельная потенциальная энергия равна сумме собственной энергии и энергии связи

$$U = U_p + U_Q. \quad (8)$$

Легко показать, что условие аддитивности в данном случае выполняется.

Для большей ясности можно провести аналогию между предложенной схемой разделения обобщенной жесткости и классической схемой разделения на жесткость формоизменения и жесткость изменения объема [8, 9]. Собственные напряжения p_{ij} являются аналогами компонент девиатора напряжений; напряжения связи Q — компонент шарового тензора; коэффициент \bar{G}_0 — аналог удвоенного модуля сдвига; L — модуля изменения объема; интенсивность p_i — интенсивности обычных напряжений; собственная энергия U_p — энергии формоизменения.

Понятия собственных модулей, собственных напряженных состояний используются в работах Н.И. Остросаблина, Ю.И. Димитриенко и др. [10–12].

В этих работах, используя чисто математический подход, исследуются свойства тензоров напряжений и деформаций, тензоров коэффициентов упругости и податливостей. Здесь же понятия с определением

“собственный” имеют принципиально другой физический смысл. Так, например, под собственным модулем понимается физическая величина, характеризующая жесткость материала только в данном направлении, т.е. как бы принадлежащая только этому направлению.

В классическом подходе, разработанном для металлов и сплавов, считается, что объем изменяется упруго, а нелинейным считается механизм формоизменения. В предложенной в работах [6, 7] схеме основным постулатом принимается предположение о том, что упруго работают связи между направлениями деформирования, а все нелинейные эффекты заключены в механизме собственной жесткости материала. Отсюда следует вывод о том, что пластическое течение в материале наступает тогда, когда критического значения достигает собственная энергия U_p или когда критического значения достигает интенсивность p_i , что легко показать, используя соотношения (3)–(5). Очевидно, что это критическое значение для изотропного материала должно равняться пределу текучести при сдвиге τ_* . Используя формулы (2)–(4), получаем условие текучести через параметры \bar{G}_0 и L

$$\begin{aligned} & (\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0L + 6L^2) (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \\ & - 2L (2\bar{G}_0 + 3L) (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ & + 2(\bar{G}_0 + 3L)^2 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 2(\bar{G}_0 + 3L)^2 \tau_*^2 \quad (9) \end{aligned}$$

и через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν

$$\begin{aligned} & (1 + 2\nu^2) (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - 2\nu (2 - \nu) (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ & + 2 (1 + \nu)^2 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) = 2(1 + \nu)^2 \tau_*^2. \quad (9') \end{aligned}$$

Это условие инвариантно по отношению к напряженному состоянию и его можно записать через первый $I_{1\sigma}$ и второй $I_{2\sigma}$ инварианты тензора напряжений

$$(1 + 2\nu^2) I_{1\sigma}^2 + 2(1 + \nu)^2 I_{2\sigma} = 2(1 + \nu)^2 \tau_*^2. \quad (10)$$

На основе предложенной схемы разделения обобщенной жесткости материала была построена нелинейная модель деформационного типа [7]. При этом были приняты следующие допущения.

1. При $p_i \leq \tau_*$ материал работает упруго с начальным модулем \bar{G}_0 , а при $p_i > \tau_*$ значение собственного модуля \bar{G} монотонно убывает и является функцией только интенсивности собственных напряжений p_i . Это означает, что для всех видов напряженно-деформированного состояния существует единая диаграмма деформирования $p_i - \bar{\varepsilon}_i$.

Уравнение (1) перепишем в новом виде:

$$\sigma_{ij} = \bar{G}\varepsilon_{ij} + L\varepsilon\delta_{ij}, \quad (11)$$

где

$$\bar{G} = \begin{cases} \bar{G}_0 & \text{при } p_i \leq \tau_*, \\ \bar{G}(p_i) & \text{при } p_i > \tau_*. \end{cases}$$

Напряжения p_{ij} будут определяться по формуле

$$p_{ij} = \bar{G}\varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

2. Значение модуля связи L остается постоянным.

3. Разгрузка происходит упруго с начальным модулем \bar{G}_0 .

Обратив соотношения (11), получим, что полные ε_{ij} , упругие $\varepsilon_{ij}^{(e)}$ и пластические $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ деформации определяются через конечные значения напряжений по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{\bar{G}}\sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}(\bar{G} + 3L)}\sigma\delta_{ij}; \\ \varepsilon_{ij}^{(e)} &= \frac{1}{\bar{G}_0}\sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}_0(\bar{G}_0 + 3L)}\sigma\delta_{ij}; \\ \varepsilon_{ij}^{(p)} &= \left(\frac{1}{\bar{G}} - \frac{1}{\bar{G}_0}\right)\sigma_{ij} - L\left[\frac{1}{\bar{G}(\bar{G} + 3L)} - \frac{1}{\bar{G}_0(\bar{G}_0 + 3L)}\right]\sigma\delta_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\sigma = \sigma_{ii}$.

Особое отличие предложенного подхода от классического заключается в том, что в условии текучести (10) присутствует первый инвариант тензора напряжений $I_{1\sigma}$ и при неупругом деформировании происходит пластическое изменение объема $\Delta\varepsilon^{(p)}$, пропорциональное σ ,

$$\Delta\varepsilon^{(p)} = \frac{\sigma}{K^p}, \quad (14)$$

где $K^p = \frac{(\bar{G}_0 + 3L)(\bar{G} + 3L)}{\bar{G}_0 - \bar{G}}$ будем называть модулем пластического изменения объема.

Из (14) следует, что знаки $\Delta\varepsilon^{(p)}$ и σ всегда совпадают. В процессе деформации тело всегда накапливает упругую энергию, за счет которой оно возвращается в естественное состояние после того, как силы, вызвавшие деформацию, исчезают. Поэтому удельная потенциальная энергия U в общем случае должна быть положительной.

Исходя из (3), (5) и (8), U выражается формулой

$$U = \frac{1}{2}\bar{G}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}L\varepsilon^2,$$

т.е. U является положительно определенной квадратичной формой относительно компонент тензора деформаций. Применяя критерий Сильвестра, легко установить, что параметры \bar{G}_0 и L должны удовлетворять условиям $\bar{G}_0 > 0$ и $\bar{G}_0 + 3L > 0$ одновременно.

Если считать, что модуль упругости E всегда должен быть больше нуля, то, используя выражения (2), получаем границы изменения коэффициента Пуассона для изотропного линейно-упругого материала

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

У некоторых разнородных материалов (например, у серых чугунов) наблюдается разрыхление, т.е. пластическое увеличение объема при сжимающих нагрузках. Если не отказываться от условия положительности U , оставаясь в рамках описанной ранее модели деформационного типа, то описать “разбухание” материала при сжатии невозможно. Развитие данного подхода применительно к таким материалам возможно, но не является темой настоящей работы.

При разгрузке напряжения σ_{ij} , Q и p_{ij} будут равны:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{L}{\bar{G}_0 + 3L} \sigma + L \Delta \varepsilon^{(p)} = \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta \varepsilon^{(p)}; \\ p_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}_0 + 3L} \sigma \delta_{ij} - L \Delta \varepsilon^{(p)} \delta_{ij}; \\ p_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} - \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \Delta \varepsilon^{(p)} \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставив выражения для собственных напряжений в условие начала текучести $p_i = \tau_{*u}$, где τ_{*u} — значение предела текучести на сдвиг, достигнутое к началу разгрузки, получим условие текучести для повторного нагружения

$$\begin{aligned} & \left(\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0 L + 6L^2 \right) \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 \right) - \\ & \quad - 2L \left(2\bar{G}_0 + 3L \right) \left(\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} \right) + \\ & \quad + 2 \left(\bar{G}_0 + 3L \right)^2 \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \right) - 2\bar{G}_0 \left(\bar{G}_0 + 3L \right) L \sigma \Delta \varepsilon^{(p)} + \\ & \quad + 3L^2 \left(\bar{G}_0 + 3L \right)^2 \left(\Delta \varepsilon^{(p)} \right)^2 = 2 \left(\bar{G}_0 + 3L \right)^2 \tau_{*u}^2 \quad (16) \end{aligned}$$

или через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\nu^2 \right) \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 \right) - 2\nu \left(2 - \nu \right) \left(\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} \right) + \\ & \quad + 2 \left(1 + \nu \right)^2 \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 \right) - 2E\nu \sigma \Delta \varepsilon^{(p)} + \frac{3E^2 \nu^2}{(1 - 2\nu)^2} \left(\Delta \varepsilon^{(p)} \right)^2 = \\ & \quad = 2 \left(1 + \nu \right)^2 \tau_{*u}^2. \quad (17) \end{aligned}$$

В пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ уравнения (16) и (17) определяют эллипсоид вращения, у которого наибольший из главных диаметров равнонаклонен к координатным осям, а координаты

центра выражаются через остаточное изменение объема

$$\sigma_{1s} = \sigma_{2s} = \sigma_{3s} = \sigma_s = \frac{L(\bar{G}_0 + 3L)}{\bar{G}_0} \Delta \varepsilon^{(p)}; \quad (18)$$

$$\sigma_s = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)^2} \Delta \varepsilon^{(p)}.$$

Полудлины главных диаметров d_1, d_2, d_3 определяются формулами

$$d_1 = d_2 = \sqrt{2} \tau_{*u};$$

$$d_3 = \frac{\sqrt{2} (1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \tau_{*u}.$$

Легко показать, что условиями существования этого эллипсоида, так же как и эллипсоида, который определяется условиями (9) и (9'), являются полученные ранее ограничения, накладываемые на параметры \bar{G}_0, L и ν .

Из (14) следует, что модуль пластического изменения объема стремится при $\bar{G} \rightarrow 0$ к величине

$$K_{\min}^p = \frac{3\nu E}{(1 - 2\nu)^2}.$$

Тогда с учетом (14) и (18) максимальное значение перемещения центра эллипсоида не может быть больше $(1/3)\sigma$.

Таким образом, согласно предложенной деформационной модели, если происходит пластическое изменение объема, то поверхность пластичности изотропно расширяется и одновременно перемещается вдоль своего главного диаметра, при этом материал приобретает анизотропию свойств.

Используя (4), (6) и (13) можно показать, что при полной разгрузке возникнут остаточные “внутренние” напряжения $p_{xx}^r, p_{yy}^r, p_{zz}^r$ и Q^r . Значения этих остаточных напряжений будут определяться формулой

$$p_{xx}^r = p_{yy}^r = p_{zz}^r = -Q^r = -L \Delta \varepsilon^{(p)}. \quad (19)$$

Здесь надо сказать, что любая теория, допускающая неупругое изменение объема и пользующаяся понятием поверхности текучести, обязана описывать этот эффект без введения дополнительных предположений о существовании ориентированных микронапряжений или еще каких-либо предположений. И хотя правильное количественное описание анизотропного упрочнения реальных материалов невозможно исключительно только с помощью предлагаемой модели, нельзя не учитывать вклад в перемещение поверхности текучести в пространстве напряжений, который может внести сколько-нибудь заметное пластическое изменение объема.

Далее рассмотрим случай, когда материал сначала подвергался одноосному растяжению до растягивающего напряжения σ_t , причем в

материале появлялись пластические деформации, а затем нагружение проводилось в противоположном направлении. Согласно условиям (16) и (17) предел текучести при сжатии σ_c должен выражаться через σ_t формулами

$$\sigma_c = - \frac{(\bar{G}_0^2 + 6\bar{G}_0L + 6L^2) \bar{G} + L(\bar{G}_0^2 + 12\bar{G}_0L + 18L^2)}{(\bar{G} + 3L) (\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0L + 6L^2)} \sigma_t;$$

$$\sigma_c = - \frac{(1 - 2\nu) (1 + 2\nu - 2\nu^2) \psi + \nu(1 + 8\nu - 2\nu^2)}{(1 + 2\nu^2) [(1 - 2\nu) \psi + 3\nu]} \sigma_t.$$

Параметр $\psi = \bar{G}/\bar{G}_0$ характеризует степень развития пластических деформаций.

Здесь можно сделать предположение о том, что разносопротивляющиеся материалы второй группы — это материалы, анизотропия свойств которых появляется в процессе изготовления образца, когда при пластическом деформировании появляется пластическое изменение объема и возникают внутренние напряжения, определяющие эту анизотропию, т.е. причиной различия свойств у некоторых материалов при растягивающих и сжимающих нагрузках могут являться не поры и микротрещины, как у большинства разномодульных материалов, а остаточные, внутренние напряжения, вызванные структурными изменениями при неупругом деформировании.

Применив описанную ранее схему, построим модель деформирования разносопротивляющегося материала, включающую в себя предысторию его создания.

Представим, что сначала материал пластически деформировался, например, под действием гидростатического давления для материалов, у которых предел текучести при сжатии σ_c больше предела текучести при растяжении σ_t , или под действием всестороннего растяжения, если $\sigma_c < \sigma_t$. Пусть после этого нагрузка была снята полностью и при этом в материале образовалось остаточное изменение объема $\Delta\varepsilon_u^{(p)}$, которое определяется по формуле (20), где p и \bar{G} — среднее напряжение и собственный модуль, достигнутые к моменту начала разгрузки:

$$\Delta\varepsilon_u^{(p)} = \frac{3p (\bar{G}_0 - \bar{G})}{(\bar{G}_0 + 3L) (\bar{G} + 3L)}. \quad (20)$$

Интенсивность собственных напряжений в момент начала разгрузки обозначим τ_{*u} . Согласно (3) и (5) она может быть вычислена по формуле

$$\tau_{*u} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{p \bar{G}}{\bar{G} + 3L}.$$

При этом в материале должны возникнуть остаточные собственные напряжения $p_{xx}^r, p_{yy}^r, p_{zz}^r$ и остаточные напряжения связи Q^r .

Условиями пластичности для случая повторной нагрузки будут условия (16) и (17).

Последовательно применив эти условия для случаев одноосного растяжения и одноосного сжатия, получим выражения для неизвестных параметров $\Delta\varepsilon_u^{(p)}$ и τ_{*u} через известные из экспериментов характеристики разносопротивляющегося материала σ_t и σ_c :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varepsilon_u^{(p)} &= \frac{\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0L + 6L^2}{2\bar{G}_0L(\bar{G}_0 + 3L)}(\sigma_t - \sigma_c) \\ \Delta\varepsilon_u^{(p)} &= \frac{(1 + 2\nu^2)}{2E\nu}(\sigma_t - \sigma_c), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

или через E и ν

$$\left. \begin{aligned} \tau_{*u}^2 &= \frac{\bar{G}^2 + 4\bar{G}L + 6L^2}{2(\bar{G} + 3L)^2}\sigma_t\sigma_c + \frac{3}{8}\frac{(\bar{G}^2 + 4\bar{G}L + 6L^2)^2}{\bar{G}^2(\bar{G} + 3L)^2}(\sigma_t - \sigma_c)^2; \\ \tau_{*u}^2 &= \frac{1 + 2\nu^2}{2(1 + \nu)^2}\sigma_t\sigma_c + \frac{3}{8}\frac{(1 + 2\nu^2)^2}{(1 + \nu)^2(1 - 2\nu)^2}(\sigma_t - \sigma_c)^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Подставив в (16) и (17) соответственно выражения (21) и (22), получим условия текучести разносопротивляющегося материала через параметры σ_t и σ_c

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \frac{2L(2\bar{G}_0 + 3L)}{\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0L + 6L^2}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ &+ \frac{2(\bar{G}_0 + 3L)^2}{\bar{G}_0^2 + 4\bar{G}_0L + 6L^2}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t\sigma_c \end{aligned}$$

и через E и ν

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \frac{2\nu(2 - \nu)}{1 + 2\nu^2}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \\ &+ \frac{2(1 + \nu)^2}{1 + 2\nu^2}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t\sigma_c. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (23) следует, что предел текучести разносопротивляющегося материала при чистом сдвиге τ_{*tc} должен выражаться через σ_t и σ_c по формуле

$$\tau_{*tc} = \sqrt{\frac{(1 + 2\nu^2)}{2(1 + \nu)^2}\sigma_t\sigma_c}. \quad (24)$$

Проведем сравнение полученного условия с известными критериями предельного состояния для разносопротивляющихся материалов [13,14].

Критерий Шлейхера определяет предельное состояние по значению полной удельной потенциальной энергии деформации и включает в себя зависимость от среднего напряжения

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 2(1 + \nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t\sigma_c. \quad (25)$$

Критическое значение касательного напряжения при сдвиге равно

$$\tau_{*tc} = \sqrt{\frac{\sigma_t\sigma_c}{2(1 + \nu)}}.$$

Особенностью данного критерия является то, что в пространстве главных напряжений условию (25) соответствует эллипсоид вращения со смещенным центром относительно координат с главным диаметром, одинакового наклоненным к координатным осям, т.е. это выпуклая и замкнутая поверхности. Достоинством можно считать и то, что условие (25) включает в себя только две независимые константы σ_t и σ_c , определяемые из простых опытов на одноосные растяжение и сжатие. Также представляется логичным тот факт, что условие (25), как и условие (23), содержит коэффициент Пуассона ν , так как в упругой области деформирование среды определяется упругими соотношениями. Предлагаемый в настоящей работе критерий (23) получится, если из полной удельной потенциальной энергии деформирования вычесть собственную энергию.

Критерий Мизеса – Шлейхера [15] является модифицированным критерием Хубера – Мизеса

$$\sigma_i + \beta\sigma = k, \quad (26)$$

где σ_i — интенсивность напряжений; β — коэффициент внутреннего трения, k — сцепление, хорошо подходит для описания текучести хрупких металлов и горных пород. В этом критерии три независимых величины σ_t , σ_c и τ_{*tc} , получаемые из эксперимента.

Критерий П.П. Баландина, так же как и критерий Мизеса – Шлейхера, в качестве основы использует удельную потенциальную энергию формоизменения, связанную со средним напряжением параметров:

$$\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t\sigma_c. \quad (27)$$

Величина τ_{*tc} через σ_t и σ_c определяется по формуле

$$\tau_{*tc} = \sqrt{\frac{\sigma_t \sigma_c}{3}}.$$

При $\sigma_t = \sigma_c$ условие (27) так же, как и условие (25), переходит в условие Мизеса. По форме это условие совпадает с условием (23), только здесь вместо собственной энергии используется энергия изменения формы. Критерий П.П. Баландина получается из условия (23) при стремлении коэффициента Пуассона к 0,5.

В пространстве главных напряжений критерию П.П. Баландина соответствует разомкнутая поверхность — параболоид вращения, что сильно уменьшает его универсальность.

Критерий И.Н. Миролюбова включает в себя по сравнению с критерием П.П. Баландина еще и квадратичную зависимость от среднего напряжения:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sigma_t + \sigma_c)^2}{8\sigma_t\sigma_c} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + \\ & + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - \frac{(\sigma_t - \sigma_c)^2}{4\sigma_t\sigma_c} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - \\ & - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t\sigma_c. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь для τ_{*tc} имеем

$$\tau_{*tc} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sigma_t \sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}}.$$

Предельная поверхность, описываемая условием (28), — однополосный гиперboloид, т.е. разомкнутая поверхность с отрицательной гауссовой кривизной, что является большим недостатком.

Более универсальным является критерий Ю.И. Ягна:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_t \sigma_c}{2\tau_{*tc}^2} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) + \\ & + \left(1 - \frac{\sigma_t \sigma_c}{2\tau_{*tc}^2}\right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - (\sigma_t - \sigma_c)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \sigma_t \sigma_c. \end{aligned}$$

Этот критерий содержит три независимых параметра τ_{*tc} , σ_t и σ_c . Меняя соотношения между ними, из него можно получить и критерий удельной энергии формоизменения, и критерий П.П. Баландина, и критерий И.Н. Миролюбова, но нельзя получить предлагаемый нами критерий (23).

В работе [13] представлен критерий

$$\begin{aligned} 3I_2 = & [\sigma_t \sigma_c - (\sigma_t - \sigma_c) I_1] \times \\ & \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3\tau_{*tc}^2}{\sigma_t \sigma_c}\right) \times \left[1 - \frac{I_3}{2} \left(\frac{I_2}{3}\right)^{-3/2}\right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где I_1 — первый инвариант тензора напряжений; I_2 и I_3 — второй и третий инварианты девиатора напряжений, а И.И. Гольденблат и В.А. Копнов предложили критерий

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_t} - \frac{1}{\sigma_c} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \left\{ \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}{2\tau_{*tc}^2} + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_t} + \frac{1}{\sigma_c} \right)^2 - \frac{1}{2\tau_{*tc}^2} \right] (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 \right\}^{1/2} = 1. \quad (30)$$

Критерии (29) и (30) имеют три независимых параметра τ_{*tc} , σ_t и σ_c , определяемых из экспериментов на одноосные растяжение и сжатие и чистый сдвиг, и при выполнении условий $\sigma_t = \sigma_c$ и $\tau_{*tc} = \sigma_t/\sqrt{3}$ приводят к условию предельного состояния по теории формоизменения.

В дальнейшем многие авторы предлагали различные соотношения в качестве критерия предельного состояния материала, но все они использовали в качестве основы в этих соотношениях выражения для энергии формоизменения, так что при применении к обычному изотропному материалу, одинаково сопротивляющемуся растяжению и сжатию, из этих критериев получается условие Хубера – Мизеса. Нам не удалось найти работы, где содержались бы результаты, приводящие к условию (23). Обширный обзор литературы по критериям предельного состояния представлен в работе [13].

После того, как мы установили вид условия начала пластического течения, можно перейти к рассмотрению вопроса о построении модели нелинейного деформирования изотропного разнсопротивляющегося материала. За основу берем описанную ранее модель деформационного типа, т.е. модель, в которой связь устанавливается между конечными значениями напряжений и деформаций.

Процесс деформирования представим проходящим в два этапа. Второй этап соответствует реальному нагружению разнсопротивляющегося материала (все параметры, относящиеся к реальному материалу, имеют индекс 2). Первый этап соответствует неупругому деформированию гипотетического (изначально одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию) изотропного материала под действием всестороннего растяжения, если предел текучести на растяжение σ_t разнсопротивляющегося материала больше предела текучести на сжатие σ_c , либо под действием всестороннего сжатия, если $\sigma_t < \sigma_c$. Гипотетическому материалу соответствуют параметры с индексом 1.

Упругие характеристики материала на первом и втором этапах считаются одинаковыми.

Для построения модели необходимо знать значение параметров σ_t и σ_c , а также иметь диаграмму деформирования разнсопротивляющегося материала при чистом сдвиге $\tau_{tc} - \frac{1}{2}\gamma_{tc}$, которая для изотропного

материала не зависит от направления кручения. Если диаграмма известна, то известно и значение предела текучести при сдвиге τ_{*tc} . На этом этапе необходимо провести проверку условия (24). Если условие (24) выполняется с достаточной точностью, то можно предположить, что применение данного подхода окажется корректным. При большой погрешности применение данной модели будет проблематичным.

Далее необходимо построить диаграмму зависимости интенсивности собственных напряжений p_i от интенсивности деформаций $\bar{\varepsilon}_i$ для гипотетического материала. Это нетрудно сделать для каждой точки диаграммы. Для чистого сдвига можно записать выражения для гипотетического материала для интенсивностей $p_i^{(1)}$ и $\bar{\varepsilon}_i^{(1)}$, которые реализовались бы, если бы действительно существовала описанная ранее предыстория пластического деформирования

$$\begin{aligned} p_i^{(1)} &= \sqrt{\frac{3}{2}L^2(\Delta\varepsilon_{u(1)}^{(p)})^2 + \tau_{tc}^2}, \\ \bar{\varepsilon}_i &= \sqrt{\frac{1}{6}(\Delta\varepsilon_{u(1)}^{(p)})^2 + \frac{1}{4}\gamma_{tc}^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Деформации гипотетического материала при повторном упругом деформировании определяются соотношением

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\bar{G}_0} \sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}_0(\bar{G}_0 + 3L)} \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_{u(1)}^{(p)} \delta_{ij},$$

а при неупругом —

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\bar{G}} \sigma_{ij} - \frac{L}{\bar{G}(\bar{G} + 3L)} \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{3} \Delta\varepsilon_{u(1)}^{(p)} \delta_{ij}. \quad (32)$$

Деформации реального разнсопротивляющегося материала определяются по формуле

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{\sigma_{ij}}{\bar{G}} - \frac{L}{\bar{G}(\bar{G} + 3L)} \sigma \delta_{ij}. \quad (33)$$

Неизвестные параметры: деформации и собственный модуль \bar{G} находятся из решения уравнений (31)–(33), совместно с условием, связывающим параметры $p_i^{(1)}$ и $\varepsilon_i^{(1)}$. Это решение находится методом последовательных приближений.

С помощью предложенной модели была проведена обработка некоторых экспериментальных данных, приведенных в работе [16]. На рисунке приведены диаграммы деформирования среднеуглеродистой стали, полученные при пропорциональном нагружении трубчатых образцов осевой силой и внутренним давлением. Сплошные линии соответствуют эксперименту, штриховые — расчету. Кривые 1 соответствуют одноосному растяжению, кривая 2 — одноосному сжатию,

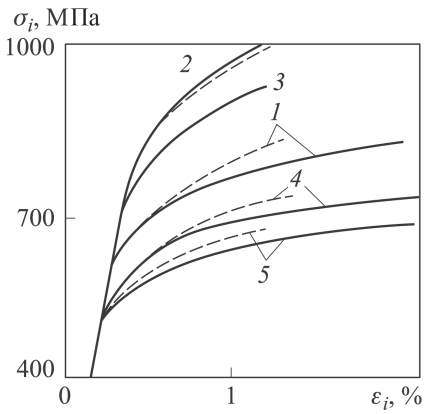


Диаграмма деформирования среднеуглеродистой стали

нелинейного поведения некоторых разнсопротивляющихся материалов. Очевидно, что возможность использования данного подхода должна анализироваться в каждом конкретном случае.

Автор благодарит профессора МГТУ им. Н.Э. Баумана В.С. Зарубина за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
2. Мэтьюс Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. М.: Техносфера, 2004. 408 с.
3. Максимов Р.Д., Плуме Э.З., Янсонс Ю.О. Сравнительное исследование механических свойств терморезистивного полимера при растяжении и сжатии // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41. № 5. С. 633–650.
4. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разнсопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 9–13.
5. Бессонов Д.Е., Еришова А.Ю., Зезин Ю.П., Мартиросов М.И., Рыбинский Л.Н. Экспериментальное исследование деформирования и разрушения зернистых композитов на основе полиэфирных смол // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 1. С. 111–125.
6. Пахомов Б.М. Условие пластического течения, включающее коэффициент Пуассона // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 2. С. 15–27.
7. Пахомов Б.М. Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования металлов и сплавов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 7. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/854.html>
8. Хажинский Г.М. Деформирование. Разрушение. Надежность. Задачи деформирования и разрушения стали. Методы оценки прочности энергетического оборудования и трубопроводов / М.: Эдиториал УРСС, 2014. 544 с.
9. Зарубин В.С., Кувьркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
10. Остросаблин Н.И. Анизотропия и общие решения уравнений линейной теории упругости. Дисс. ... д-ра техн. наук. Тула, 2000. 215 с.

кривая 3 — чистому сдвигу, кривые 4, 5 — двухосному растяжению при $\sigma/\sigma_i = 0,577; 0,667$. Здесь σ_i — интенсивность напряжений. Диаграммы представлены в координатах — обычные интенсивности напряжений σ_i и деформаций ε_i . За опорную кривую, по которой проводились описанные ранее расчеты, бралась кривая для чистого сдвига.

Проведенные расчеты для аналогичных экспериментальных данных показали, что предложенная модель может быть использована для описа-

11. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 624 с.
12. *Димитриенко Ю.И.* Тензорный анализ. Т. 1. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
13. *Божанов П.В.* Задачи пластического деформирования тонких пластинок из дилатирующих разнородных материалов. Дисс. ... канд. техн. наук. Тула, 2004. 233 с.
14. *Потапова Л.Б., Ярцев В.П.* Механика материалов при сложном напряженном состоянии. М.: Машиностроение, 2005. 244 с.
15. *Коврижных А.М.* Уравнения плоского напряженного состояния при условии пластичности Мизеса – Шлейхера // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 6. С. 144–153.
16. *Трещев А.А.* Вариант подхода к построению определяющих соотношений разнородных материалов и использование его при расчете элементов конструкций. Дисс. ... д-ра техн. наук. Тула, 1995. 501 с.

REFERENCES

- [1] Myasnikov V.P., Oleynikov A.I. Osnovy mekhaniki geterogenno-soprotivlyayushchikhsya sred [Grounds of mechanics of heterogeneously resisting media]. Vladivostok, Dal'nauka Publ., 2007. 172 p.
- [2] Met'yuz F., Rolings R. Russ. ed.: Kompozitnye materialy [Compositematerials]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2004. 408 p.
- [3] Maksimov R.D., Plume E.Z., Yansons Yu.O. Comparative research of thermosetting polymer mechanical properties at tension and compression. *Mekh. Kompozitn. Mater.* [Mechanics of Composite Materials], 2005, vol. 41, no. 5, pp. 633–650 (in Russ.).
- [4] Bessonov D.E., Zezin Yu.P., Lomakin E.V. Multimodal resistance of granular composites based on unsaturated polyesters. *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, part. 2, pp. 9–13 (in Russ.).
- [5] Bessonov D.E., Ershova A.Yu., Zezin Yu.P., Martirosov M.I., Rybinskiy L.N. Experimental research of deforming and destruction of granular composites based on polyester resins. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh resheniy* [Journal on Composite Mechanics and Design], 2008, vol. 14, no. 1, pp. 111–125 (in Russ.).
- [6] Pakhomov B.M. Plastic yielding condition including Poisson's ratio. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 2, pp. 15–27 (in Russ.).
- [7] Pakhomov B.M. Application of the inherent stresses theory to nonlinear deforming of metals and alloys. *Jelekt. nauchno-tehn. Izd. "Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii" MGTU im. Bauman* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation" of Bauman MSTU], 2013, no. 7(19). Available at: URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/854.html> (in Russ.).
- [8] Khazhinskiy G.M. Deformirovanie. Razrushenie. Nadezhnost'. Zadachi deformirovaniya i razrusheniya stali. Metody otsenki prochnosti energeticheskogo oborudovaniya i truboprovodov [Deformation. Fracture. Reliability. Problems of Deformation and Fracture of Steel. Methods for Assessing the Strength of Power Equipment and Pipelines.]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2014. 544 p.
- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical Models of Continuum Mechanics and Electrodynamics]. Moscow MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2008. 512 p.
- [10] Ostrosablin N.I. Anizotropiya i obshchie resheniya uravneniy lineynoy teorii uprugosti [Anisotropy and general solutions of linear elasticity theory]. Diss. dokt. tekhn. nauk [Dr. techn. sci. diss.]. Tula, 2000. 215 p.
- [11] Dimitrienko Yu.I. Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy [Nonlinear mechanics of continuum]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 624 p.

- [12] Dimitrienko Yu.I. Tenzornyy analiz. T. 1. Mekhanika sploshnoy sredy [Tensor analysis. Vol. 1. Continuum mechanics. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2011. 463 p.
- [13] Bozhanov P.V. Zadachi plasticheskogo deformirovaniya tonkikh plastinok iz dilatiruyushchikh raznosoprotivlyayushchikhsya materialov [Problems of plastic deformation of thin plates of dilatant materials with multimodal resistance]. Diss. kand. tekhn. nauk [Cand. tehn. sci. diss.]. Tula, 2004. 233 p.
- [14] Potapova L.B., Yartsev V.P. Mekhanika materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii [Mechanics of materials in the complex stressed state]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 244 p.
- [15] Kovrizhnykh A.M. Plane stress equations for the Von Mises–Schleicher yield criterion. *Prikl. Mat. i Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 2004, vol. 45, no. 6, pp. 144–153 (in Russ.).
- [16] Treshchev A.A. Variant podkhoda k postroeniyu opredelyayushchikh sootnosheniy raznosoprotivlyayushchikhsya materialov i ispol'zovanie ego pri raschete elementov konstruktsiy [Version of approach to obtain the defining relationships for materials with multimodal resistance, and application of this approach for designing the construction elements]. Diss. dokt. tekhn. nauk [Dr. tehn. sci. diss.]. Tula, 1995. 501 p.

Статья поступила в редакцию 16.05.2014

Пахомов Борис Максимович — канд. техн. наук, доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области механики нелинейного деформирования материалов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Pakhomov B.M. — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Spacecrafts and Space Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of mechanics of nonlinear deforming of materials.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.