

А. К. Карышев, М. И. Супельняк

**ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРА
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ
СРЕДОЙ**

Предложен аналитический метод решения уравнения теплопроводности в квазистационарном состоянии для неограниченного цилиндра с осесимметричными нестационарными периодическими условиями теплообмена с внешней средой. В его основе лежит разложение искомой функции температуры в ряд Фурье по времени. Приведены результаты расчетов с использованием полученной зависимости и проведен их анализ. Достоверность решения подтверждена сопоставлением с результатами численного моделирования.

E-mail: k1kf@bmsstu-kaluga.ru; max2901@mail.ru

Ключевые слова: цилиндр, уравнение теплопроводности, нестационарные периодические условия теплообмена, температурные волны, парциальное охлаждение лопаток.

Постановка задачи. Одним из направлений совершенствования газотурбинных установок является повышение их эффективности, которое в настоящее время в основном достигается увеличением температуры рабочего тела на входе в турбину. Однако работа при высоких температурах ведет к снижению срока службы деталей турбины, что требует применения для их изготовления жаропрочных материалов, либо использования охлаждения. Достигнутый на сегодняшний день уровень температуры газа 1800 К не может быть обеспечен механическими свойствами существующих материалов и стал возможен благодаря достижениям в создании эффективных систем охлаждения [1].

Среди охлаждаемых элементов турбины основное внимание уделяется рабочим лопаткам как наиболее нагруженным деталям. При этом проектирование и изготовление их конструкции значительно усложняется. Избежать подобных трудностей можно, используя наружное парциальное охлаждение, когда охлаждающий агент подводится по некоторому сектору проточной части турбины, а поверхность лопатки попеременно вступает в контакт с охладителем и горячим газом. В этом случае рабочие лопатки могут иметь такую же конструкцию, как и неохлаждаемые. В подобной схеме использование воздуха в качестве охлаждающего агента оказывается малоэффективным, что показал еще А. Стодола. Более целесообразным является применение водяного пара, который помимо охлаждения способен совершать дополнительную техническую работу. Пар с необходимыми параметрами можно получать за счет теплоты уходящих газов и, таким образом, дополнительно не сжигать топливо. Схема подобной установки была

предложена в ЛПИ (ныне СПбГПУ) [2], там же была разработана одна из ее возможных конструкций [3].

В связи с высокой частотой вращения ротора турбины продолжительность контакта лопаток с рабочими телами крайне мала, поэтому температурные волны, вызванные тепловым потоком переменного направления, распространяются на незначительную глубину. Несмотря на практически постоянную температуру во всем остальном объеме лопаток, ее нестационарность в поверхностном слое вызывает термодинамические напряжения, способные повлиять на прочность лопаточного аппарата. Для их расчета необходимо знать температурное поле лопатки, определение которого в общем случае представляет собой сопряженную задачу газодинамики и теплообмена, решаемую численными методами. Ее решение требует значительных затрат времени и вычислительных ресурсов, а полученный результат достаточно сложно проанализировать. Вместе с тем целесообразно перейти от лопатки со сложной геометрией к телу простой геометрической формы, допускающей получение аналитического решения, а взаимодействие с потоками газа и охлаждающего агента описать с помощью закона Ньютона–Рихмана (граничного условия III рода), т.е. задать на его поверхности нестационарные периодические температуру среды и коэффициент теплоотдачи. Подобный подход качественно не повлияет на характер температурного поля и позволит получить функциональную зависимость, удобную для исследования.

В настоящей работе в качестве исследуемого объекта выбран цилиндр неограниченной длины с одинаковыми условиями теплообмена на всей поверхности, что делает температуру функцией лишь радиуса и времени. Это позволит получить решение, пригодное для практического использования.

Математическая модель. Для нахождения распределения температуры цилиндра по радиусу во времени необходимо решить уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad T(0, \tau) \neq \infty, \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} = \alpha(\tau) [T(R, \tau) - T_c(\tau)] \quad (3)$$

и начальным условием

$$T(r, 0) = T_0(r), \quad (4)$$

где $T = T(r, \tau)$ — температура цилиндра на радиусе r в момент времени τ ; a и λ — коэффициенты теплопроводности и теплопровод-

ности материала цилиндра; R — радиус цилиндра; $\alpha(\tau)$ — коэффициент теплоотдачи; $T_c(\tau)$ — температура среды; $T_0(r)$ — распределение температуры в цилиндре в начальный момент времени.

Сложность поставленной задачи состоит в том, что из-за нестационарности коэффициента теплоотдачи невозможно согласовать решение дифференциального уравнения (1) с граничным условием (3), оставаясь в рамках классических методов математической физики. На практике обычно приводят функцию температуры к виду интегральной зависимости от ее значения на поверхности, которое определяется из решения интегрального уравнения Вольтерра II рода и представляет собой бесконечный ряд последовательных приближений [4, 5]. Однако выразить члены полученного ряда в явном виде удастся лишь для простых ядер уравнения. Также существуют приближенные методы [6], применение которых, правда, ненамного упрощает возможность использования найденных решений. Попытка получить распределение температуры в цилиндре операционным методом при простых гармонических зависимостях температуры среды и коэффициента теплоотдачи от времени была сделана в работе [7], но слишком формальное применение теоремы смещения привело автора к неверному результату.

Вместе с тем авторы воспользовались известным подходом классической теории теплопроводности [8]: поскольку практический интерес представляет решение для квазистационарного состояния, являющееся периодической функцией времени и не зависящее от начальных условий (4), то предлагается искать его в виде ряда Фурье:

$$T(r, \tau) = \tilde{A}_0^T(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau), \quad (5)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{\tau_{\Delta}}$ — круговая частота; τ_{Δ} — период изменения параметров среды; $\tilde{A}_0^T(r)$, $\tilde{A}_n^T(r)$ и $\tilde{B}_n^T(r)$ — функции координаты r , подлежащие определению. Кроме того, представляем в виде ряда Фурье температуру среды

$$T_c(\tau) = \frac{A_0^{Tc}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{Tc} \cos(n\omega\tau) + B_n^{Tc} \sin(n\omega\tau), \quad (6)$$

коэффициент теплоотдачи

$$\alpha(\tau) = \frac{A_0^{\alpha}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha} \cos(n\omega\tau) + B_n^{\alpha} \sin(n\omega\tau), \quad (7)$$

а также их произведение, которое условно можно считать плотностью теплового потока $q(\tau)$ на поверхности тела с нулевой температурой,

находящегося в рассматриваемой среде:

$$q(\tau) = \alpha(\tau)T_c(\tau) = \frac{A_0^q}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^q \cos(n\omega\tau) + B_n^q \sin(n\omega\tau), \quad (8)$$

где $A_0^{T_c}/2 = \bar{T}_c$, $A_0^\alpha/2 = \bar{\alpha}$ и $A_0^q/2 = \bar{q}$ – средние значения температуры среды, коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока за период; A_n^α , B_n^α , $A_n^{T_c}$, $B_n^{T_c}$, A_n^q , B_n^q – коэффициенты соответствующих рядов.

Подставив соотношение (5) в выражение (1) и сгруппировав члены с одинаковыми гармониками, получим новый вид уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{A}_0^T}{dr} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{A}_n^T}{dr} \right) - n \frac{\omega}{a} \tilde{B}_n^T = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{B}_n^T}{dr} \right) + n \frac{\omega}{a} \tilde{A}_n^T = 0. \quad (11)$$

Аналогично переписываем граничное условие (2):

$$\frac{d\tilde{A}_0^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{A}_0^T(0) \neq \infty, \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{A}_n^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{A}_n^T(0) \neq \infty, \quad (13)$$

$$\frac{d\tilde{B}_n^T(0)}{dr} = 0, \quad \tilde{B}_n^T(0) \neq \infty. \quad (14)$$

Решение уравнения (9) с условием (12) имеет вид

$$\tilde{A}_0^T(r) = \frac{A_0^T}{2} = \text{const},$$

где $A_0^T/2 = \bar{T}$ – среднее значение температуры цилиндра за период. Из уравнений (10) и (11) легко получить следующую зависимость:

$$\frac{d^4 \tilde{A}_n^T}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \tilde{A}_n^T}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \tilde{A}_n^T}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\tilde{A}_n^T}{dr} + \left(n \frac{\omega}{a} \right)^2 \tilde{A}_n^T = 0, \quad (15)$$

откуда находим [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^T(r) = \bar{A}_n^T J_0 \left(\sqrt{in \frac{\omega}{a}} r \right) + \bar{B}_n^T Y_0 \left(\sqrt{in \frac{\omega}{a}} r \right) + \\ + \bar{C}_n^T J_0 \left(i \sqrt{in \frac{\omega}{a}} r \right) + \bar{D}_n^T Y_0 \left(i \sqrt{in \frac{\omega}{a}} r \right), \quad (16) \end{aligned}$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ — функции Бесселя I и II рода нулевого порядка; $\bar{A}_n^T, \bar{B}_n^T, \bar{C}_n^T, \bar{D}_n^T$ — произвольные комплексные постоянные; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. В общем случае решение (16) — комплексное, но поскольку уравнение (15) содержит только действительные коэффициенты, то $\tilde{A}_n^T(r)$ является вещественной функцией, определяемой суперпозицией действительной и мнимой частей (16) [10]. Она может быть найдена с помощью соотношений

$$\begin{aligned} J_0(ix) &= I_0(x), \\ -\frac{\pi}{2}Y_0(ix) &= K_0(x) - i\frac{\pi}{2}I_0(x), \\ I_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ber}(x) \pm i\text{bei}(x), \\ K_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ker}(x) \pm i\text{kei}(x) \end{aligned}$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^T(r) &= A_n^T \text{ber}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + B_n^T \text{bei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + \\ &+ C_n^T \text{ker}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + D_n^T \text{kei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\text{Fo}^* = a/(\omega R^2)$ — критерий Фурье; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя I рода нулевого порядка; $K_0(x)$ — функция Макдональда; $\text{ber}(x), \text{bei}(x), \text{ker}(x), \text{kei}(x)$ — функции Кельвина; $A_n^T, B_n^T, C_n^T, D_n^T$ — произвольные постоянные. Тогда для $\tilde{B}_n^T(r)$ с учетом выражения (17) получаем из (10) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n^T(r) &= -A_n^T \text{bei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + B_n^T \text{ber}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) - \\ &- C_n^T \text{kei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + D_n^T \text{ker}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right). \end{aligned}$$

Из условий (13) и (14) находим, что $C_n^T = 0$ и $D_n^T = 0$, поскольку $\text{ker}(x) \rightarrow \infty$ и $\text{kei}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\tilde{A}_n^T(r) = A_n^T \text{ber}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + B_n^T \text{bei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right), \quad (18)$$

$$\tilde{B}_n^T(r) = -A_n^T \text{bei}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + B_n^T \text{ber}\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right). \quad (19)$$

Для определения A_0^T, A_n^T, B_n^T необходимо получить новый вид граничного условия (3). При этом произведение $\alpha(\tau)T(R, \tau)$, являющееся периодической функцией, с учетом зависимостей (5) и (7) представля-

ем в виде ряда Фурье [11]:

$$\alpha(\tau)T(R, \tau) = \frac{A_0^{\alpha T}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\alpha T} \cos(n\omega\tau) + B_n^{\alpha T} \sin(n\omega\tau), \quad (20)$$

где

$$A_0^{\alpha T} = \frac{A_0^\alpha A_0^T}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^\alpha \tilde{A}_m^T(R) + B_m^\alpha \tilde{B}_m^T(R)];$$

$$A_n^{\alpha T} = \frac{A_n^\alpha A_0^T}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [(A_{m+n}^\alpha + A_{m-n}^\alpha) \tilde{A}_m^T(R) + (B_{m+n}^\alpha + B_{m-n}^\alpha) \tilde{B}_m^T(R)],$$

$$B_n^{\alpha T} = \frac{B_n^\alpha A_0^T}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [(B_{m+n}^\alpha - B_{m-n}^\alpha) \tilde{A}_m^T(R) - (A_{m+n}^\alpha - A_{m-n}^\alpha) \tilde{B}_m^T(R)],$$

$$B_0^\alpha = 0, \quad A_{-k}^\alpha = A_k^\alpha, \quad B_{-k}^\alpha = -B_k^\alpha.$$

С учетом ряда (20) запишем граничное условие на поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} A_0^{\alpha T} &= A_0^q, \\ \lambda \frac{d\tilde{A}_n^T(R)}{dr} + A_n^{\alpha T} &= A_n^q, \\ \lambda \frac{d\tilde{B}_n^T(R)}{dr} + B_n^{\alpha T} &= B_n^q. \end{aligned} \quad (21)$$

Заменив в (21) $\tilde{A}_n^T(R)$ и $\tilde{B}_n^T(R)$ их выражениями из (18) и (19), получим бесконечную систему уравнений, из которой определяются постоянные A_0^T, A_n^T, B_n^T . Она может быть записана в матричной форме

$$\Phi X = \Psi, \quad (22)$$

где X и Ψ — вектор-столбцы неизвестных постоянных и свободных членов, имеющие вид

$$X = \begin{bmatrix} A_0^T \\ \vdots \\ A_n^T \\ B_n^T \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} 2A_0^q \\ \vdots \\ 2A_n^q \\ 2B_n^q \\ \vdots \end{bmatrix};$$

Φ — матрица коэффициентов, записываемая как

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0} & \cdots & \varphi_{0,2n-1} & \varphi_{0,2n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \varphi_{2n-1,0} & \cdots & \varphi_{2n-1,2n-1} & \varphi_{2n-1,2n} & \cdots \\ \varphi_{2n,0} & \cdots & \varphi_{2n,2n-1} & \varphi_{2n,2n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{0,0} = A_0^\alpha,$$

$$\varphi_{0,2n-1} = 2 \left[A_n^\alpha \text{ber} \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) - B_n^\alpha \text{bei} \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) \right],$$

$$\varphi_{0,2n} = 2 \left[A_n^\alpha \text{bei} \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) + B_n^\alpha \text{ber} \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) \right],$$

$$\varphi_{2n-1,0} = A_n^\alpha,$$

$$\varphi_{2n,0} = B_n^\alpha,$$

$$\varphi_{2n-1,2m-1} = \begin{cases} E_{n,m}, & \text{если } m \neq n, \\ E_{n,n} + R_n, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\varphi_{2n-1,2m} = \begin{cases} F_{n,m}, & \text{если } m \neq n, \\ F_{n,n} + S_n, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\varphi_{2n,2m-1} = \begin{cases} G_{n,m}, & \text{если } m \neq n, \\ G_{n,n} - S_n, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$\varphi_{2n,2m} = \begin{cases} H_{n,m}, & \text{если } m \neq n, \\ H_{n,n} + R_n, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

$$E_{n,m} = (A_{m+n}^\alpha + A_{m-n}^\alpha) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right) - (B_{m+n}^\alpha + B_{m-n}^\alpha) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$F_{n,m} = (A_{m+n}^\alpha + A_{m-n}^\alpha) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right) + (B_{m+n}^\alpha + B_{m-n}^\alpha) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$G_{n,m} = (B_{m+n}^\alpha - B_{m-n}^\alpha) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right) + (A_{m+n}^\alpha - A_{m-n}^\alpha) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$H_{n,m} = (B_{m+n}^\alpha - B_{m-n}^\alpha) \text{bei} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right) - (A_{m+n}^\alpha - A_{m-n}^\alpha) \text{ber} \left(\sqrt{\frac{m}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$R_n = 2 \frac{\lambda}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}' \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$S_n = 2 \frac{\lambda}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}' \left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right),$$

$$\text{ber}'(x) = \frac{d\text{ber}(x)}{dx}, \quad \text{bei}'(x) = \frac{d\text{bei}(x)}{dx},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поскольку решить систему (22) в общем виде не представляется возможным, то ищем ее приближенное решение. Учитываем, что все коэффициенты A_n^T и B_n^T , начиная с некоторого номера $n = k + 1$, ста-

новятся настолько малыми, что ими можно пренебречь, и в результате получаем обыкновенную систему $(2k + 1)$ алгебраических уравнений с $(2k + 1)$ неизвестными, которая решается стандартными методами линейной алгебры. Определив из нее неизвестные величины, находим функцию распределения температуры в цилиндре

$$T(r, \tau) \cong \frac{A_0^T}{2} + \sum_{n=1}^k \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau). \quad (23)$$

Таким образом, используя классический метод разделения переменных Фурье, мы получаем приближенное аналитическое выражение, пригодное для дальнейшего анализа.

Остановимся на вопросе о средней температуре цилиндра. Физически квазистационарное состояние определяется равенством подведенного к цилиндру и отведенного от него количества теплоты за период:

$$\int_0^{\tau\Delta} \alpha(\tau)[T(R, \tau) - T_c(\tau)]d\tau = 0.$$

Отсюда с учетом (8) и (20) находим среднюю температуру цилиндра

$$\bar{T} = \left[\bar{q} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\alpha \tilde{A}_n^T(R) + B_n^\alpha \tilde{B}_n^T(R)) \right] / \bar{\alpha}. \quad (24)$$

Таким образом, точное значение \bar{T} может быть найдено только после решения системы (22) и зависит от параметров среды, теплофизических свойств материала и размеров цилиндра. Однако для характерных в газовых турбинах условий и многих практических задач можно пренебречь рядом в правой части уравнения (24) и записать приближенную зависимость:

$$\bar{T} \approx \frac{\bar{q}}{\bar{\alpha}} = \int_0^{\tau\Delta} \alpha(\tau)T_c(\tau)d\tau / \int_0^{\tau\Delta} \alpha(\tau)d\tau. \quad (25)$$

На практике искомые зависимости часто представляют в виде безразмерных функций чисел и критериев подобия, что позволяет использовать одно решение для целой совокупности подобных явлений. Данный подход удобен и в нашем случае. Безразмерная избыточная температура определяется по формуле:

$$\theta(\hat{r}, \hat{\tau}) = \frac{T(\hat{r}, \hat{\tau}) - \bar{T}_c}{\Delta T_c}, \quad (26)$$

где $\Delta T_c = T_c^{\max} - T_c^{\min}$ — размах колебаний температуры среды; T_c^{\max} и T_c^{\min} — наибольшее и наименьшее значения температуры среды за период; $\hat{r} = r/R$ — безразмерный радиус; $\hat{\tau} = \omega\tau$ — безразмерное время. Безразмерная избыточная температура может быть получена либо из размерного решения (23), либо из решения краевой задачи

теплопроводности (1)–(3) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{\tau}} &= \text{Fo}^* \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{r}} \right), \\ \frac{\partial \theta(0, \hat{\tau})}{\partial \hat{r}} &= 0, \quad \theta(0, \hat{\tau}) \neq \infty, \\ -\frac{\partial \theta(1, \hat{\tau})}{\partial \hat{r}} &= \text{Bi}(\hat{\tau})[\theta(1, \hat{\tau}) - \theta_c(\hat{\tau})], \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\theta_c(\hat{\tau}) = \frac{T_c(\hat{\tau}) - \bar{T}_c}{\Delta T_c} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\theta_c} \cos(n\hat{\tau}) + B_n^{\theta_c} \sin(n\hat{\tau})$$

– безразмерная избыточная температура среды;

$$\text{Bi}(\hat{\tau}) = \frac{\alpha(\hat{\tau})R}{\lambda} = \frac{A_0^{\text{Bi}}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\text{Bi}} \cos(n\hat{\tau}) + B_n^{\text{Bi}} \sin(n\hat{\tau})$$

– критерий Био;

$$A_n^{\theta_c} = \frac{A_n^{T_c}}{\Delta T_c}, \quad B_n^{\theta_c} = \frac{B_n^{T_c}}{\Delta T_c}, \quad A_n^{\text{Bi}} = \frac{A_n^{\alpha} R}{\lambda}, \quad B_n^{\text{Bi}} = \frac{B_n^{\alpha} R}{\lambda}$$

– безразмерные коэффициенты соответствующих рядов;

$$\frac{A_0^{\text{Bi}}}{2} = \bar{\text{Bi}} = \frac{\bar{\alpha} R}{\lambda}$$

– среднее значение критерия Био за период.

Для решения системы (27) составляются совершенно аналогичные приведенным уравнения и искомая зависимость представляется рядом Фурье, имеющая вид

$$\theta(\hat{r}, \hat{\tau}) \cong \frac{A_0^{\theta}}{2} + \sum_{n=1}^k \tilde{A}_n^{\theta}(\hat{r}) \cos(n\hat{\tau}) + \tilde{B}_n^{\theta}(\hat{r}) \sin(n\hat{\tau}),$$

где $A_0^{\theta}/2 = \bar{\theta} = (\bar{T} - \bar{T}_c)/\Delta T_c$ – средняя безразмерная избыточная температура цилиндра за период; $\tilde{A}_n^{\theta}(\hat{r})$ и $\tilde{B}_n^{\theta}(\hat{r})$ – безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^{\theta}(\hat{r}) &= A_n^{\theta} \text{ber} \left(\hat{r} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) + B_n^{\theta} \text{bei} \left(\hat{r} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right), \\ \tilde{B}_n^{\theta}(\hat{r}) &= -A_n^{\theta} \text{bei} \left(\hat{r} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right) + B_n^{\theta} \text{ber} \left(\hat{r} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \right), \\ A_n^{\theta} &= \frac{A_n^T}{\Delta T_c}, \quad B_n^{\theta} = \frac{B_n^T}{\Delta T_c}. \end{aligned}$$

Используя полученную функцию, можно построить график размаха колебаний безразмерной избыточной температуры $\Delta\theta(\hat{r})$ как разность между ее наибольшим $\theta^{\max}(\hat{r})$ и наименьшим $\theta^{\min}(\hat{r})$ значениями за период. По нему определяется безразмерная глубина проникания температурных волн

$$\hat{\delta}_\zeta = 1 - \hat{r}_\zeta,$$

где $\Delta\theta(\hat{r}_\zeta) = \zeta$ — заданное техническими условиями значение от 0 до 1. Обычно принимают $\zeta = 0,01$. Следует проанализировать зависимость $\bar{\theta}$ и $\hat{\delta}_\zeta$ от влияющих параметров, к которым относятся Fo^* и характеристики, однозначно определяющие вид $Bi(\hat{r})$ и $\theta_c(\hat{r})$.

Частным случаем рассмотренных поверхностных условий теплообмена является постоянство коэффициента теплоотдачи, т.е. коэффициенты A_n^α и B_n^α в (7) равны нулю и $\alpha(\tau) = \bar{\alpha}$. Решения подобных задач для конкретных периодических законов изменения температуры среды во времени можно найти в работах [4, 8, 12], а для общей зависимости — в [13]. Для представленного же в работе метода из (22) однозначно определяются коэффициенты A_0^T, A_n^T, B_n^T :

$$\begin{aligned} A_0^T &= A_0^{Tc}, \\ A_n^T &= \frac{U_n A_n^{Tc} - V_n B_n^{Tc}}{U_n^2 + V_n^2}, \\ B_n^T &= \frac{V_n A_n^{Tc} + U_n B_n^{Tc}}{U_n^2 + V_n^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{\sqrt{n/Fo^*}}{Bi} \text{ber}'\left(\sqrt{\frac{n}{Fo^*}}\right) + \text{ber}\left(\sqrt{\frac{n}{Fo^*}}\right), \\ V_n &= \frac{\sqrt{n/Fo^*}}{Bi} \text{bei}'\left(\sqrt{\frac{n}{Fo^*}}\right) + \text{bei}\left(\sqrt{\frac{n}{Fo^*}}\right). \end{aligned}$$

Из формул (28) следует, что $\bar{T} = \bar{T}_c$, т.е. средняя температура цилиндра зависит только от параметров среды и может быть определена сразу из разложения (6). Отметим, что для безразмерного решения $\bar{\theta} = 0$, а коэффициенты A_n^θ и B_n^θ вычисляются по формулам (28), в которые вместо A_n^{Tc} и B_n^{Tc} подставляются $A_n^{\theta c}$ и $B_n^{\theta c}$.

Также представляет интерес предельный случай $\alpha(\tau) \rightarrow \infty$. При этом на поверхности цилиндра получаем граничные условия I рода:

$$T(R, \tau) = T_c(\tau).$$

Поскольку размах колебаний температуры на поверхности цилиндра будет максимальным, то температурные волны распространятся на наибольшую глубину. Коэффициенты A_0^T, A_n^T, B_n^T для данного вари-

анта имеют следующий вид:

$$A_0^T = A_0^{Tc},$$

$$A_n^T = \frac{\text{ber}(\sqrt{n/\text{Fo}^*})A_n^{Tc} - \text{bei}(\sqrt{n/\text{Fo}^*})B_n^{Tc}}{\text{ber}^2(\sqrt{n/\text{Fo}^*}) + \text{bei}^2(\sqrt{n/\text{Fo}^*})},$$

$$B_n^T = \frac{\text{bei}(\sqrt{n/\text{Fo}^*})A_n^{Tc} + \text{ber}(\sqrt{n/\text{Fo}^*})B_n^{Tc}}{\text{ber}^2(\sqrt{n/\text{Fo}^*}) + \text{bei}^2(\sqrt{n/\text{Fo}^*})}.$$

Все рассуждения касающиеся средней температуры цилиндра и безразмерного решения, аналогичны предыдущему частному случаю.

Результаты расчетов и их обсуждение. Для рабочего лопаточного аппарата парциально охлаждаемой турбины будут характерны ступенчатые временные законы изменения температуры среды и коэффициента теплоотдачи, показанные на рис. 1. Обе функции характеризуются степенью паровой парциальности $e_{\text{п}}$, определяющей длительность охлаждения за период полного поворота ротора τ_{Δ} , и двумя значениями зависимых величин — $T_{\text{п}}$, $T_{\text{г}}$ и $\alpha_{\text{п}}$, $\alpha_{\text{г}}$ соответственно. Здесь индекс “п” относится к параметрам пара, а “г” — газа. Кроме того, коэффициент теплоотдачи пара удобно выразить через соответствующую величину для газа

$$\alpha_{\text{п}} = \beta\alpha_{\text{г}},$$

где коэффициент $\beta \geq 1$ характеризует эффективность охлаждающего агента. Для данных характеристик среды значение температуры $\bar{T}_{\text{с}}$ вычисляется по формуле

$$\bar{T}_{\text{с}} = e_{\text{п}}T_{\text{п}} + (1 - e_{\text{п}})T_{\text{г}},$$

а приближенная зависимость (25) для \bar{T} принимает вид

$$\bar{T} \approx \frac{\beta e_{\text{п}}T_{\text{п}} + (1 - e_{\text{п}})T_{\text{г}}}{1 + (\beta - 1)e_{\text{п}}}.$$

Расчет был проведен для цилиндра $R = 0,015$ м из жаропрочного сплава ХН80ТБЮ с теплофизическими свойствами $a = 7,225 \times 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 27$ Вт/(м·К), взятыми из справочника [14], и сле-

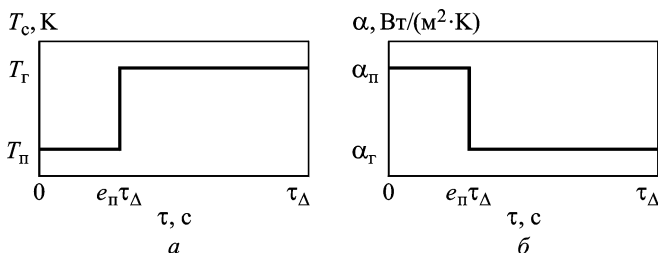


Рис. 1. Зависимость температуры среды (а) и коэффициента теплоотдачи (б) от времени

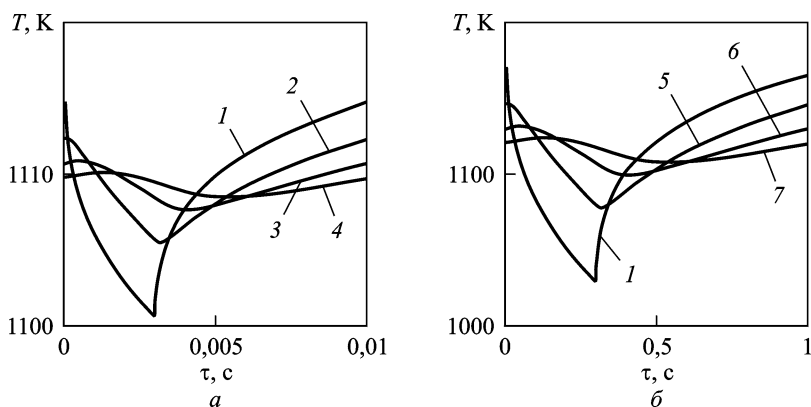


Рис. 2. Зависимость температуры цилиндра от времени ($\tau_{\Delta} = 0,01$ с (а) и 1 с (б)) на радиусах:

1 – 0,015 м; 2 – 0,0149 м; 3 – 0,0148 м; 4 – 0,0147 м; 5 – 0,014 м; 6 – 0,013 м; 7 – 0,012 м

дующими параметрами среды: $e_{\text{п}} = 0,3$; $T_{\text{п}} = 500$ К; $T_{\text{г}} = 1500$ К ($T_{\text{с}} = 1200$ К); $\alpha_{\text{г}} = 2000$ Вт/(м²·К); $\beta = 1,5$. Для наглядности эффекта температурных волн были выбраны значения τ_{Δ} , равные 0,01 с и 1 с. Первое соответствует реальной частоте вращения ротора турбины 6000 об/мин. На рис. 2 приведено изменение температуры за период на нескольких радиусах. На графиках видно, что при приближении к центру цилиндра колебания температуры приобретают простую гармоническую форму, смещаются по фазе, а их размах значительно уменьшается. Очень наглядно затухание колебаний можно проследить на зависимостях размаха колебаний температуры $\Delta T(r)$, приведенных на рис. 3. Если при $\tau_{\Delta} = 1$ с он составляет на поверхности 134,73 К, то для $\tau_{\Delta} = 0,01$ с уже равен 14,24 К и не превышает 1 К на глубине $3,64 \cdot 10^{-4}$ м. Поэтому можно ожидать, что в реальной парциально охлаждаемой лопатке распространение температурных волн будет иметь схожий характер и глубина их проникания будет довольно мала.

На рис. 4 сопоставлены результаты аналитического решения и численного расчета, проведенного по изложенной в работе [15] методике. Шаг по времени принимался равным $2 \cdot 10^{-5}$ с, а по координате — 10^{-3} м от центра цилиндра до радиуса 0,014 м и $5 \cdot 10^{-6}$ м в поверхностном слое толщиной 0,001 м. Как следует из рисунка, графики хорошо согласуются — погрешность численного решения не превышает 0,4 К.

Отметим, что при численном моделировании необходимым требованием является корректное воспроизведение профиля решения в зоне больших градиентов, в данном случае в поверхностном слое. Для этого используется неравномерная сетка, сгущающаяся по мере приближения к внешней поверхности. При моделировании процесса теплообмена в реальной лопатке будет удобно оценивать зону сгущения, руководствуясь полученными номограммами для глубины распространения температурных волн.

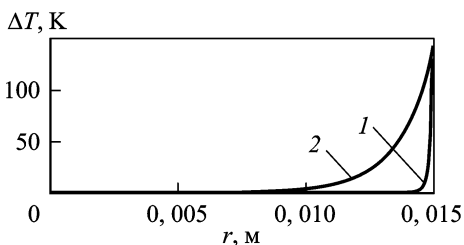


Рис. 3. Зависимость размаха колебаний температуры цилиндра от радиуса для $\tau_{\Delta} = 0,01$ с (1) (масштаб по оси ΔT 10:1) и 1 с (2)

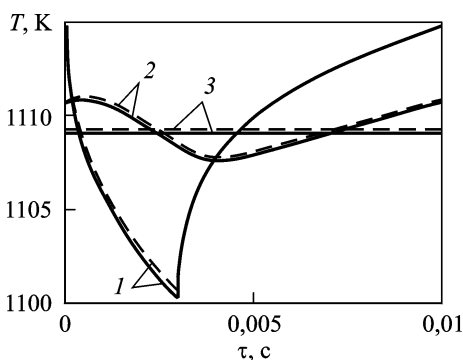


Рис. 4. Зависимость температуры цилиндра от времени для периода цикла 0,01 с на радиусах: 1 – 0,015 м; 2 – 0,0148 м; 3 – 0 м (штриховая линия – аналитическое решение; сплошная – численный расчет)

Интересно также оценить погрешность, которую дает формула (25) для средней температуры цилиндра. Ее целесообразно искать в следующем виде:

$$\Delta_T = \frac{\bar{T}^{\text{т.р}} - \bar{T}^{\text{п.р}}}{\bar{T}_c - \bar{T}^{\text{п.р}}},$$

где $\bar{T}^{\text{т.р}}$ и $\bar{T}^{\text{п.р}}$ – значения точного и приближенного расчетов \bar{T} . Результаты вычислений сведены в таблицу, из которой следует, что приближенное значение \bar{T} удовлетворительно согласуется с точными значениями для относительно больших периодов колебаний, а для малых практически совпадает.

Сравнение результатов точных вычислений средней температуры цилиндра за период с расчетом по приближенной формуле

$\tau_{\Delta}, \text{с}$	$\bar{T}^{\text{п.р}}, \text{К}$	$\bar{T}^{\text{т.р}}, \text{К}$	$\Delta_T, \%$
0,01	1108,70	1109,26	0,62
0,1		1110,47	1,95
1		1114,27	6,11
10		1125,74	18,67
100		1159,08	55,18

При переходе к безразмерным величинам характеристики среды примут вид, показанный на рис. 5. Причем безразмерная избыточная температура характеризуется только степенью паровой парциальности $e_{\text{п}}$, а критерий Био – еще своим средним значением $\overline{\text{Bi}}$ и коэффициентом β . Критерии Био по газу и пару вычисляются по формулам:

$$\text{Bi}_{\text{г}} = \frac{\overline{\text{Bi}}}{1 + (\beta - 1)e_{\text{п}}}, \quad \text{Bi}_{\text{п}} = \beta \text{Bi}_{\text{г}}.$$

Поведение функции безразмерной избыточной температуры в нашем случае определяется параметрами Fo^* , $e_{\text{п}}$, $\overline{\text{Bi}}$, β .

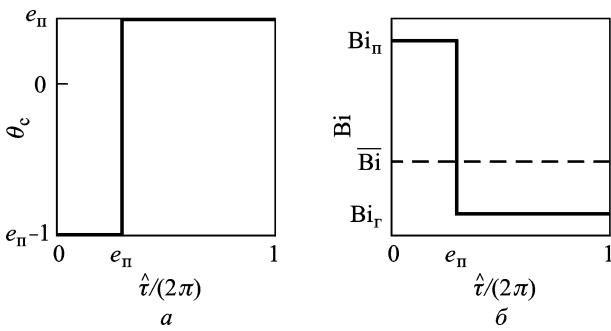


Рис. 5. Зависимость от безразмерного времени:
a – безразмерной избыточной температуры среды; *б* – критерия Био

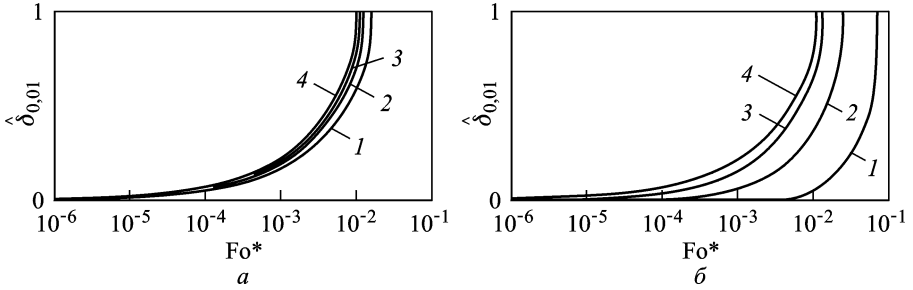


Рис. 6. Зависимость безразмерной глубины проникания температурных волн от критерия Фурье в предельном случае (а) $\overline{Bi}(\hat{\tau}) \rightarrow \infty$ при степени паровой парциальности (1 – 0,1; 2 – 0,2; 3 – 0,3; 4 – 0,5) и в частном случае (б) $\overline{Bi}(\hat{\tau}) = \overline{Bi}$ при $e_n = 0,3$ и значениях критерия Био (1 – 0,1; 2 – 1; 3 – 10; 4 – ∞)

На рис. 6, *a* приведены зависимости безразмерной глубины распространения температурных волн $\hat{\delta}_{0,01}$ от критерия Фурье при различных степенях парциальности для предельных условий $\overline{Bi}(\hat{\tau}) \rightarrow \infty$. В такой постановке определяющими критериями будут только Fo^* и e_n . Кроме того, как отмечалось ранее, колебания температуры распространяются на максимальную глубину. Таким образом, все зависимости, учитывающие влияние \overline{Bi} и β , будут лежать ниже приведенных на рис. 6, *a*. Из графиков следует, что, несмотря на максимальный размах колебаний температуры поверхности, в практическом для нас интервале значений Fo^* от 10^{-6} до 10^{-4} значения $\hat{\delta}_{0,01}$ малы и не превышают 0,0069 на его нижней границе и 0,069 на верхней. При этом очевидна нелинейная зависимость глубины распространения температурных волн от степени парциальности – если для значений 0,4 (на графике не приведено) и 0,5 кривые практически совпадают, то для 0,1 и 0,2 они заметно отстоят друг от друга. По результатам расчетов установлено, что колебания температуры распространяются на всю глубину цилиндра для $e_n = 0,1$ при $Fo^* = 0,0158$, а для $e_n = 0,5$ при $Fo^* = 0,0105$. Отметим, что $\hat{\delta}_{\zeta}$ будет максимальной из всех возможных при $e_n = 0,5$, а соответствующая ей кривая представляет собой линию симметрии, т.е. графики

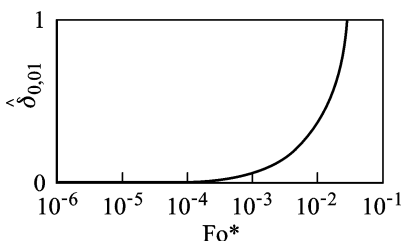


Рис. 7. Зависимость безразмерной глубины проникания температурных волн от критерия Фурье при $e_n = 0,3$, $\overline{Bi} = 1$ и $\beta = 5$

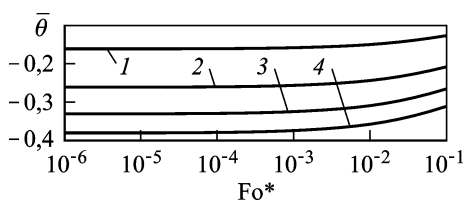


Рис. 8. Зависимость средней безразмерной избыточной температуры цилиндра за период от критерия Фурье при $e_n = 0,3$, $\overline{Bi} = 1$ и значениях $\beta = 2$ (1); 3 (2); 4 (3); 5 (4)

для $e_n = 0,5 \pm b$ совпадают и дальнейшее увеличение парциальности приводит к снижению $\hat{\delta}_\zeta$. Однако в реальной установке не удастся получить такие большие значения степени паровой парциальности без дополнительного сжигания топлива.

Случай постоянной интенсивности теплоотдачи $Bi(\hat{\tau}) = \overline{Bi}$ получается из общего при $\beta = 1$. Соответствующие зависимости для $\hat{\delta}_{0,01}$ приведены на рис. 6, б при $e_n = 0,3$ и различных значениях \overline{Bi} . Видно, что по мере увеличения критерия Био кривые приближаются к предельной линии $\overline{Bi} \rightarrow \infty$. При $Fo^* = 10^{-4}$ и $\overline{Bi} = 10$ величина $\hat{\delta}_{0,01}$ составляет 0,0328, а при $\overline{Bi} = 1$ уже 0,0042, что значительно меньше ее предельного значения 0,0661.

Поскольку при использовании в качестве охлаждающего агента влажного пара можно добиться максимального значения коэффициента β порядка 5 [3], то мы ограничились исследованием только данного значения. Зависимость $\hat{\delta}_{0,01}$ от Fo^* при $e_n = 0,3$, $\overline{Bi} = 1$ и $\beta = 5$ приведена на рис. 7. Построенная кривая практически совпадает с аналогичной для частного случая $Bi(\hat{\tau}) = 1$, поэтому вполне допустимо для реальных условий оценивать глубину распространения температурных волн по соответствующему графику для постоянной интенсивности теплоотдачи.

На рис. 8 показано, как изменяется средняя безразмерная избыточная температура цилиндра за период при различных значениях β . Из графиков следует, что использование высокоэффективного охлаждающего агента позволяет добиться значительного выигрыша в снижении температуры.

Выводы. В результате проведенного теоретического исследования было получено приближенное аналитическое выражение для температурного поля неограниченного цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой в квазистационарном состоянии, основанное на представлении искомой температуры в виде ряда Фурье по времени. И хотя при постоянстве коэффициента теплоотдачи для решения краевой задачи теплопроводности более удобно использовать другие классические методы математической

физики [6, 8, 12], его нестационарность делает их неприменимыми, в то время как предложенный метод позволяет достаточно эффективно решить поставленную задачу, не прибегая к более сложным и громоздким подходам.

Найденное решение было использовано применительно к исследованию температурного состояния парциально охлаждаемых лопаток высокотемпературной турбины. Как показали результаты расчетов, температурные волны распространяются на незначительную глубину, а их размах на поверхности лопатки составляет порядка 10–20 К. Кроме того, полученные безразмерные номограммы могут быть использованы при построении неравномерной сетки для численного моделирования температурного состояния лопатки.

В заключение отметим, что на практике возникают и другие вопросы, связанные с нестационарными периодическими условиями теплообмена тел с окружающей средой, например при измерении пульсирующей температуры газовых потоков методом тонких цилиндрических проволочек [7]. Поэтому полученные аналитические выражения представляют несомненный интерес, поскольку пригодны для любых периодических законов изменения температуры среды и коэффициента теплоотдачи во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок / В.Л. Иванов, А.И. Леонтьев, Э.А. Манушин, М.И. Осипов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 592 с.
2. Зысин В. А. Комбинированные парогазовые установки и циклы. – Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 187 с.
3. Зысин Л. В. Высокотемпературные турбины с парциальными подводами газа и пара // Труды ЛПИ. – 1964. – № 232. – С. 20–25.
4. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
5. Любов Б. Я., Яловой Н. И., Манусов И. Н. Теплопроводность при произвольном периодическом изменении коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды / Индустриальный ин-т им. М.И. Арсеничева. – Днепропетровск, 1971. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ 21.01.72, № 4099-72.
6. Карташов Э. М., Любов Б. Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83–111.
7. Гордов А. Н. Температура неограниченного цилиндра в потоке с пульсирующими скоростью и температурой // ПММ. – 1955. – Т. 19, № 2. – С. 240–243.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ЛКИ, 2008. – 472 с.
11. Толстов Г. П. Ряды Фурье. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

12. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
13. Карышев А. К., Супельняк М. И. Определение поля температур неограниченного цилиндра при переменной температуре окружающей среды операционным методом // Научно-технические технологии в приборостроении и развитии инновационной деятельности в вузе: Материалы Всерос. научн.-техн. конф. 10–12 декабря 2008 г., Т. 1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – С. 103–105.
14. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. – М.: Атомиздат, 1968. – 484 с.
15. Карышев А. К., Супельняк М. И. Температура цилиндра при переменных периодических температуре и коэффициенте теплоотдачи среды // Научно-технические технологии в приборостроении и развитии инновационной деятельности в вузе: Материалы региональной научн.-техн. конф. 28–29 апреля 2010 г., Т. 1. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – С. 60–65.

Статья поступила в редакцию 28.09.2010



Анатолий Константинович Карышев родился в 1940 г., окончил в 1969 г. Московский энергетический институт (технический университет). Канд. техн. наук, профессор кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области теплофизики.

A.K. Karyshev (b. 1940) graduated from the Moscow Power Engineering Institute (Technical University) in 1969. Ph. D. (Eng.), professor of “Thermal Engines and Thermal Physics” department of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of thermal physics.



Максим Игоревич Супельняк родился в 1988 г., студент 6 курса кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор восьми научных работ в области теплофизики.

M.I. Supel’nyak (b. 1988) — student of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 8 publications in the field of thermal physics.