

Н. А. Л о б о в

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИНАМИКЕ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены вопросы динамики неголономных систем. Приведены неточности разделения кинематических связей несвободных систем на голономные и неголономные. Показано на конкретных примерах, что все реальные тела, катящиеся по реальной физической поверхности, образуют систему с голономной связью.

Роль публикаций научных результатов имеет громадное значение в развитии науки и техники. Тем не менее, вызывает искреннее недоумение тот факт, что в учебнике [1] разновидности случаев качения шара или колеса по некоторой поверхности определяются такими понятиями, как “абсолютная гладкость” или “абсолютная шероховатость” поверхностей контактирующих тел, которые не характеризуются никакими параметрами твердых тел. Более того, в зависимости от состояния катящегося тела, поверхности качения и конфигурации тела качения эти системы разделяются на голономные (с интегрируемыми уравнениями связи) и на неголономные системы (с неинтегрируемыми уравнениями связи). Между тем, все реальные тела, катящиеся по реальной физической поверхности, образуют систему с голономными связями, поскольку сила трения между данными телами зависит от относительной скорости их упругого скольжения.

Передача тяговых (движущих или тормозных) усилий с использованием сил сухого трения всегда сопровождается так называемым упругим скольжением. Различают два вида упругого скольжения с позиции причин его образования. Одно упругое скольжение возникает вследствие упругой деформации гибкого тягового органа, что характерно для ременных передач [2] и лифтов с канатоведущим шкивом. Другой вид упругого скольжения возникает из-за контактных и тангенциальных деформаций контактирующих тел, что характерно для железнодорожных и крановых колес при взаимодействии с рельсами [3–6], подшипников качения [7] и других трибологических пар качения. В английской литературе это явление обычно называют “криппом”, во французской — “псевдоскольжением”.

Наиболее наглядно неизбежность относительного скольжения упругих тел можно показать на примере движения четырехколесной тележки по плоской поверхности (рис. 1). Два колеса тележки перекошены

в противоположные стороны на некоторые малые и равные углы β , а центры тележек и всех колес движутся с постоянной скоростью \bar{V}_0 . Окружная скорость \bar{V}_1 перекошенных колес и скорость центров колес связаны векторным соотношением

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_1 + \bar{V}_{ск},$$

где $\bar{V}_{ск}$ — скорость упругого скольжения.

Вследствие относительного скольжения на перекошенные колеса в поперечном направлении со стороны поверхности качения действуют силы, величины которых, согласно теории упругого скольжения, определяются соотношением:

$$R = -K\beta,$$

где K — коэффициент пропорциональности, зависящий от механических характеристик контактирующих тел и их геометрических параметров.

Максимальная величина поперечной силы R , как известно, равна $R_{max} = Gf$ (G — вертикальная нагрузка на колесо, f — коэффициент трения), а при некотором максимальном угле перекоса колес β_{max} ее можно определить по формуле:

$$R_{max} = K\beta_{max}.$$

Отсюда становится очевидным, что в пределах $0 < \beta < \beta_{max}$ перекошенные колеса находятся в зоне упругого скольжения.

Кроме поперечной силы R , при этом возникает момент, стремящийся вернуть колесо в положение, когда угол $\beta = 0$. Однако этот момент имеет малую величину, и в динамических расчетах им обычно пренебрегают [6].

Впервые на явление упругого скольжения обратил внимание О. Рейнольдс в 1875 г., который качественно установил, что катящееся ведущее колесо тележки проходит по рельсовому пути за один оборот колеса путь несколько меньший, чем длина его окружности. Количественная оценка эффекта упругого скольжения оказалась весьма трудоемкой. Используя результаты решения плоской контактной задачи со сдвигом

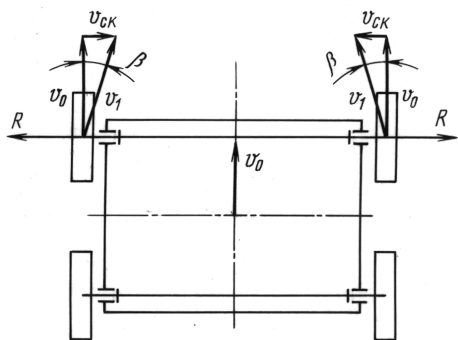


Рис. 1. Схема, поясняющая механизм возникновения поперечного упругого скольжения

и вводя некоторые коррективы на основании экспериментальных данных, Ф. Картер в 1926 г. [8, 9] получил приемлемую для решения практических задач зависимость между внешней силой F , действующей на колесо в продольном или поперечном направлении (безразлично), и относительной скоростью упругого скольжения в виде:

$$F = R\eta,$$

где $\eta = V_{ск}/V_0$, $V_0 = \omega r$ — скорость “чистого качения”; ω и r — частота вращения и радиус колеса.

Для стального колеса и плоского рельса коэффициент K можно представить как

$$K = 9,43(1 - \sqrt{1 - q})\sqrt{brG}, \text{ кН},$$

где b — ширина рельса, мм; $q = F/F_{\max}$, $F_{\max} = Gf$ [3].

Многочисленные попытки получить теоретическое решение пространственной контактной задачи со скольжением успеха не имели (работы А.Ю. Ишлинского [10] и многих других авторов). “Точное” решение рассматриваемой задачи было получено лишь в 1980 г. Дж. Калькером [11], который свел решение данной проблемы к нахождению численным методом минимума специально образованного функционала.

В известной монографии Ю.И. Неймарка и Н.А. Фуфаева [12] авторы отмечают: “К ... практически очень важной области, которая оставалась неохваченной общей теорией неголономных систем, относятся различные системы, в которых связи качения не являются классическими. К таким системам принадлежат автомобили, самолетное шасси, мотоцикл, железнодорожный подвижной состав (добавим от себя: передвигающиеся по рельсовому пути краны). Однако эти связи нового типа были изучены не в связи с механикой неголономных систем, а с задачей о путевой устойчивости подвижного железнодорожного состава”.

В этом состоит некоторый парадокс в истории развития динамики несвободных систем: теория неголономных систем развивалась независимо от позднее развившейся теории упругого скольжения. Рассмотрим два характерных примера, показывающих, как учет эффекта упругого скольжения влияет на изменение динамических свойств голономных и неголономных систем.

1. Рассмотрим малые колебания железнодорожного конического ската, катящегося по прямолинейному рельсовому пути (рис. 2). Геометрические параметры ската и рельсового пути: $2l$ — колея рельсового пути; r_0 — радиус качения колес при начальном положении ската, т. е. когда его ось перпендикулярна рельсовому пути и центр ската (в точке

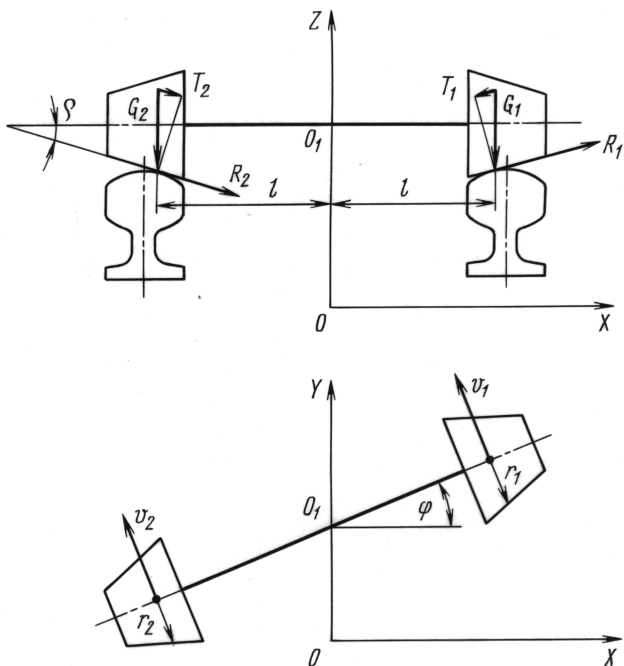


Рис. 2. Схема железнодорожного конического ската, движущегося по прямолинейному рельсовому пути

O_1) равноудален от точек контакта с рельсами; ρ — угол конусности ската (обычно $\text{tg } \rho = 0,05$). Ориентация ската в пространстве определяется системой координат $OXYZ$. Поворот оси ската в горизонтальной плоскости определяется углом φ .

На колеса ската действуют соответственно силы веса $G_1 = G_2$ и силы упругого скольжения R_1 и R_2 , положительные направления которых выбраны в соответствии с направлением оси X . Проекции сил веса колес на образующие конуса ската назовем силами действия уклона (T_1 , T_2). В исходном положении ската $T_1 = G_1 u$, $T_2 = G_2 u$, где $u = \text{tg } \rho$.

При отсутствии поворота ската на угол φ сместим его центр на малую величину x . Тогда радиусы качения колес $r_1 = r_0 + ux$, $r_2 = r_0 - ux$, а вследствие подъема первого колеса на величину ux и опускания второго колеса на величину ux , силы действия уклона станут равными $T_1 = G_1(u + ux/l)$, $T_2 = G_2(u - ux/l)$.

Повернем теперь ось ската в горизонтальной плоскости на малый угол φ и составим выражения для сил R_1 и R_2 . Согласно теории упругого скольжения $R_1 = -K\eta_1$, $R_2 = -K\eta_2$, где K — коэффициент упругого скольжения; η_1 , η_2 — относительные скорости упругого скольжения колес, определяемые соотношениями:

$$\eta_1 = (x - v_{\text{ск1}x})/\dot{y}, \quad \eta_2 = (x - v_{\text{ск2}x})\dot{y};$$

здесь $v_{\text{ск}1x}$ — скорость упругого скольжения 1-го колеса в поперечном направлении; $v_{\text{ск}2x}$ — то же 2-го колеса.

Принимая $r_1\dot{\theta} = r_2\dot{\theta} = \dot{y}$, где θ — частота вращения колес, получаем

$$\eta_1 = dx/dy + \varphi; \quad \eta_2 = dx/dy + \varphi;$$

$$R_1 = -K(dx/dy + \varphi); \quad R_2 = -K(dx/dy + \varphi).$$

Проектируя силы, действующие на скат, на ось X , получаем

$$\frac{dx}{dy} + \frac{Gu}{Kl}x + \varphi = 0. \quad (1)$$

Скорость поворота оси ската в горизонтальной плоскости будет $d\varphi/dt = (v_1 - v_2)/2l$, где $v_1 = (r_0 + ux)\dot{\theta}$, $v_2 = (r_0 - ux)\dot{\theta}$ — окружные скорости колес.

Отсюда получаем

$$d\varphi/dy - u/(r_0l)x = 0. \quad (2)$$

Исключим из уравнений (1) и (2) φ и получим

$$\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{Gu}{Kl} \frac{dx}{dy} + \frac{u}{r}x = 0. \quad (3)$$

Как известно, это уравнение затухающих “гармонических” колебаний осциллятора, имеющего диссипативные силы типа жидкостного трения. Отсюда следует, что невозмущенное движение $\dot{y} = V_0t$, $x = 0$ является устойчивым (V_0 — скорость центра ската). Этот анализ показывает, что учет эффекта упругого скольжения “превращает” неустойчивую систему в устойчивую. Заметим также, что в монографии Ю.И. Неймарка и Н.А. Фуфаева [12] авторы допускают ошибочный вывод: “Колесная пара с неизношенными коническими колесами всегда неустойчива...” (стр. 425).

2. В работе А.И. Кухтенко [13] сообщается, что “...при исследовании систем автоматического регулирования врубовых машин и угольных комбайнов нам и пришлось обнаружить тот факт, что при наличии в системе фрикционного вариатора с переменным передаточным числом, управляемого автоматическим регулятором, она становится неголономной”. В подтверждение этого положения автор рассматривает систему автоматического регулирования для поддержания

заданной скорости приводного двигателя, схема системы приведена на рис. 3. При отклонении регулируемой величины $\dot{\varphi}_1$ от заданного значения происходит перемещение ведомого фрикционного колеса по шлицевому валу, в силу чего изменяется скорость движения ведомого вала $\dot{\varphi}_2$, от которой зависит величина загрузки двигателя. В данном случае скорости ведущего и ведомого фрикционных дисков связаны условием

$$\dot{\varphi}_1 \rho = r \dot{\varphi}_2. \quad (4)$$

“В переходном процессе, — пишет автор работы [13], — ρ изменяется по неизвестному закону и уравнение (4) в силу этого не может быть проинтегрировано, поэтому на него и необходимо смотреть, как на уравнение неголономной связи”. Далее А.И. Кухтенко составляет уравнения движения объекта регулирования с идеальным регулятором, пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода, игнорируя неголономную связь, а затем — с использованием уравнений Лагранжа первого рода (с неопределенными множителями) с учетом неголономной связи.

В первом случае уравнение движения принимает вид

$$(J_1 + J_2 \rho^2 / r^2) \ddot{\varphi}_1 + 2J_2 \rho / r^2 (\dot{\rho} \dot{\varphi}_1) = M_1 - M_2 \rho / r, \quad (5)$$

во втором случае уравнение движения будет

$$(J_1 + J_2 \rho^2 / r^2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 \rho / r^2 (\dot{\rho} \dot{\varphi}_1) = M_1 - M_2 \rho / r. \quad (6)$$

Из сравнения уравнений (5) и (6) видно (заключает автор), “... что не учтя неголономности исследуемой системы, мы бы сделали ошибку на 100 % в значении 2-го члена уравнения”.

Составим теперь уравнение этого же объекта регулирования, учитывая упругое скольжение фрикционного вариатора. Движущая сила в

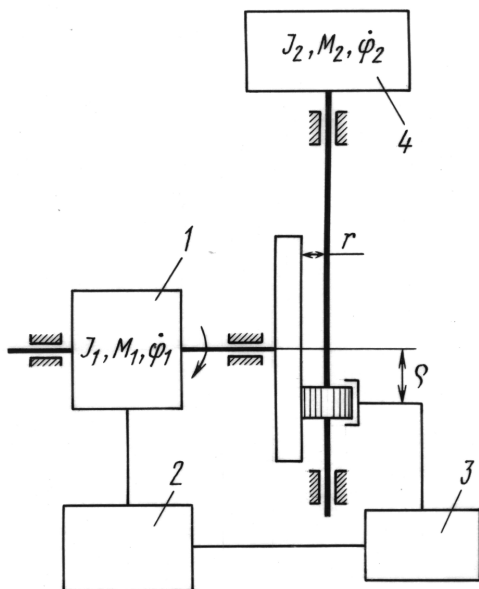


Рис. 3. Система автоматического регулирования угловой скорости двигателя:

1 — двигатель, 2 — регулятор, 3 — регулирующий орган, 4 — нагрузочное устройство; J_1 — момент инерции ротора двигателя и элементов, расположенных на его валу; J_2 — то же элементов, расположенных на валу нагрузочного устройства; $\dot{\varphi}_1$ — скорость двигателя (ведущего вала вариатора), $\dot{\varphi}_2$ — скорость ведомого вала вариатора

точке контакта фрикционного вариатора равна M_1/ρ , а сила сопротивления в той же точке равна M_2/r . Согласно теории упругого скольжения справедливо соотношение $M_1/\rho - M_2/r = K\eta$ или

$$M_1 - M_2\rho/r = K\rho\eta, \quad (7)$$

где K — коэффициент упругого скольжения; $\eta = V_{\text{ск}}/V_0$ — относительная скорость упругого скольжения, $V_{\text{ск}}$ — скорость упругого скольжения, V_0 — окружная скорость “чистого качения”.

Скорость упругого скольжения определяется как разность между действительной скоростью и скоростью “чистого качения” и равна $V_{\text{ск}} = \dot{x} - V_0$, где $\dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1\rho$ — действительная окружная скорость ведущего колеса; $V_0 = \omega_0\rho$ — окружная скорость чистого качения; ω_0 — заданная частота вращения приводного двигателя. Отсюда получаем, что

$$\eta = \dot{\varphi}_1/\omega_0 - 1. \quad (8)$$

Объединяя уравнения (5), (7), и (8), получим искомое уравнение объекта регулирования:

$$(J_1 + J_2\rho^2/r^2)\ddot{\varphi}_1 + 2J_2\rho/r^2(\dot{\rho}\dot{\varphi}_1) = K\rho(\dot{\varphi}_1/\omega_0 - 1). \quad (9)$$

Последнее уравнение, учитывающее упругое скольжение элементов фрикционной пары, “трансформирует” уравнение неголономной системы (6) в уравнение голономной системы.

Этот пример показывает, что большинство практических задач о качении двух тел или задач о передаче тяговых усилий посредством сил трения, решаются как задачи голономной механики при условии нахождения упругих характеристик контактирующих тел, таких как модуль упругости и коэффициент Пуассона, а также коэффициентов трения скольжения. При этом исключаются из рассмотрения такие абстрактные с позиций современной трибологии понятия, как абсолютно гладкое или абсолютно шероховатое тело.

Следует отметить еще одно важное преимущество метода решения задач динамики с использованием модели голономной системы по сравнению с использованием модели неголономной системы. Это связано с точностью получаемого решения, ибо первое решение имеет большую точность и достоверность, поскольку при этом учитывается реальное тангенциальное проскальзывание контактирующих тел, в то время как во втором случае это явление игнорируется. Например, при расчете, когда в контакте находятся два стальных тела, ошибка составляет (0,2...0,4) %, ошибка в пройденном пути автомобиля равна (3...5) %, ошибка курсометра или планиметра, в которых в качестве

контактирующих тел используется скругленное или заостренное колесико и бумага, легко подсчитывается путем измерения известных путей или площадей.

В том случае, когда физические параметры фрикционных контактирующих тел рассчитать не предоставляется возможным, целесообразно, естественно, использовать аппарат решения задач неголономной механики, который в настоящее время достаточно хорошо развит [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л о й ц я н с к и й А. Г., Л у р ь е А. И. Курс теоретической механики. – Т. 2. – М.: Госуд. изд. техн.-теор. лит.-ры. – 1955. – 595 с.
2. Ж у к о в с к и й Н. Е. О скольжении ремня на шкивах // Полное собрание сочинений. – Т. 8, ОНТИ. – 1937. – 19 с.
3. К о в а л е в Н. А. Боковые колебания подвижного состава. – М.: Трансжелдориздат. 1957. – 245 с.
4. М и н о в Д. К. Механическая часть электрического подвижного состава. – М.: Госэнергоиздат. 1954. – 383 с.
5. Л о б о в Н. А. Динамика грузоподъемных кранов. – М.: Машиностроение. 1987. – 157 с.
6. Д у л е в И. А. Определение сил трения при стационарном качении кранового колеса по рельсу // Машиноведение. – 1989. – № 5. – С. 63–69.
7. С п е к т о р А. А. Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 236, № 1. – С. 39–42.
8. C a r t e r F. W. On the action of locomotive driving wheel.// Proceedings Royal Society of London. A112. – 1926. – P. 151–157.
9. C a r t e r F. W. On the stability of Running of Locomotives.// Proceedings Royal Society of London. Vol. 121. 1928. – P. 585–597.
10. И ш л и н с к и й А. Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Известия АН СССР, ОТН. – 1956. – № 6. – С. 41–49.
11. K a l k e r J. J. Review of wheel-rail rolling contact theories. – The general problem of rolling contact.: ASME. 1980. – P. 77–92.
12. Н е й м а р к Ю. И., Ф у ф а е в Н. А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука. 1967. – 519 с.
13. К у х т е н к о А. И. Некоторые основные вопросы кинематики и динамики автоматически регулируемых врубовых машин с плавной подачей. – Киев: Институт горного дела АН СССР, автореф. док. дис. 1954. – 30 с.
14. Д о б р о н р а в о в В. В. Основы механики неголономных систем. – М., 1967. – 270 с.

Статья поступила в редакцию 30.11.2004