

УДК 533.6.011.8

## **АНАЛИЗ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ В УДАРНОЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ**

**В.В. Кузенов, М.А. Котов**

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, Российская Федерация  
e-mail: kuzenov@ipmnet.ru; mikhail\_kotov88@mail.ru

*Рассмотрены упрощенные одномерные математические модели процессов, описывающие образование и распространение ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов в ударных трубах. Эти модели основаны на квазиодномерных уравнениях радиационной газовой динамики.*

*Экспериментальные и теоретические исследования образования и распространения ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов с использованием ударных труб всегда представляли значительный интерес, а в последнее время получили заметное развитие. Это связано с тем, что ударные трубы являются наиболее удобным инструментом лабораторного исследования в таких актуальных областях современной науки и техники, как аэрофизика и химическая кинетика, газодинамика и молекулярная физика. Также большую роль играет тот факт, что течения многокомпонентного газа, который испытывает химические превращения, колебательное и электронное возбуждение, реализуются во многих современных технологических и энергетических установках, гиперзвуковых летательных аппаратах. При этом относительно простым объектом для создания неравновесных процессов в газах является ударная волна, распространяющаяся в трубе круглого или прямоугольного сечения (такая геометрия поперечного сечения ударной трубы позволяет заметно упростить газодинамическую картину течения в рабочем тракте).*

**Ключевые слова:** аэродинамическая ударная труба, уравнения газовой динамики, нелинейная квазимоноотонная компактная разностная схема, многошаговый метод Рунге–Кутты.

## **ANALYSIS OF GAS-DYNAMIC PROCESSES AND DEVELOPMENT OF A MODEL OF FLOWS IN THE HYPERSONIC SHOCK TUNNEL**

**V.V. Kuzenov, M.A. Kotov**

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation  
e-mail: kuzenov@ipmnet.ru; mikhail\_kotov88@mail.ru

*The simplified one-dimensional mathematical models of processes are considered which describe the formation and propagation of shock waves, depression waves, and contact discontinuities in shock tunnels. These models are based on quasi-one-dimensional equations of radiative gas dynamics. Experimental and theoretical studies of formation and propagation of shock waves, depression waves, and contact discontinuities with the use of shock tunnels were always of significant interest, while recently they have developed appreciably. It is associated with the fact that shock tunnels are a most convenient tool of laboratory research in such fields of current*

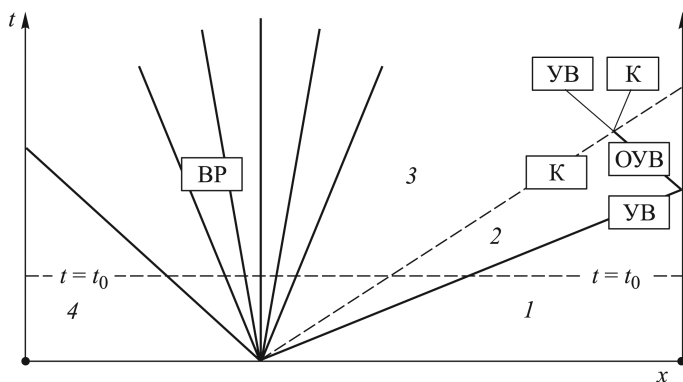
importance in the modern science and technology as aero physics and chemical kinetics, gas dynamics, and molecular physics. A large role is also played by the fact that the flows of a multicomponent gas, which undergoes chemical conversions and the oscillatory and electron excitation, take place in many modern technological and power plants, hypersonic aircrafts. Here the relatively simple object for creating nonequilibrium processes in gases is a shock wave propagating in a tube with a circular or rectangular section (this geometry of the shock wave section allows the gas-dynamic flow pattern in the working channel to be simplified visibly).

**Keywords:** shock tunnel, gas dynamics equations, nonlinear quasi-monotonic compact difference scheme, Runge–Kutta multistep method.

**Постановка задачи.** Целью работы является рассмотрение процессов образования и распространения ударных волн (УВ), волн разрежения и контактных разрывов в ударных трубах с использованием упрощенных одномерных математических моделей.

Одна из важных задач работы состоит также в разработке численной методики и вычислительного кода моделей, предназначенных для описания нестационарных одномерных радиационно-магнитогазодинамических процессов в различных типах ударных труб.

**Описание процессов, протекающих в ударных трубах.** Ударные трубы, при использовании которых создается УВ, имеют следующий принцип действия (рис. 1): УВ образуется в трубе, наполненной исследуемым (разгоняемым) газом, при движении со сверхзвуковой скоростью “поршня” того или иного вида. Аэродинамическая ударная труба, в которой для создания УВ используется сжатый газ, наиболее эффективна, когда отношение скоростей звука в рабочем ( $C_R$  — разгоняющем) и исследуемом ( $C_{St}$  — разгоняемом) газах достаточно велико ( $C_R/C_{St} \gg 1$ ). Подогрев рабочего газа в аэродинамической ударной трубе электрическим разрядом, твердыми или газообразными веществами может сопровождаться заметным увеличением указанного



**Рис. 1.  $x-t$ -диаграмма процессов взаимодействия системы УВ, волн разрежения и контактных разрывов в однодиафрагменной ударной трубе после разрыва диафрагмы:**

УВ — фронт УВ; К — фронт контактной границы; ВР — область волны разрежения; ОУВ — фронт отраженной УВ

соотношения. Это связано с тем, что температура газа может возрасти от 2 кК (случая без подогрева газа) до 20 кК (при подогреве газа), что приводит к существенному (в данном случае приблизительно в 3 раза) увеличению скорости звука в рабочем ( $C_R$ ) газе и к пропорциональному увеличению отношения  $C_R/C_{St}$ .

В ударных трубах поверхность фронта УВ, которая генерируется в исследуемом (разгоняемом) газе, близка к плоской, а течение газа в рабочем тракте ударной трубы в первом приближении можно считать одномерным. В простейшем варианте ударной трубы система ранее указанных УВ создается после разрыва диафрагмы (выполненной из металлической фольги или лавсановой пленки), разделяющей камеру низкого давления, которая заполнена исследуемым газом при пониженном давлении (порядка 0,1...0,01 атм), и камеру высокого давления, наполненную сжатым газом (при давлении порядка от нескольких до сотен атмосфер).

Одной из важных задач в теории ударной трубы является установление математических зависимостей, связывающих физические величины, определяющие состояние газа в ударной трубе в начальный момент времени, с параметрами системы указанных волн в произвольный момент времени.

Эти зависимости могут быть найдены методами математического моделирования, которые (в случае использования высокоточных вычислительных методов) позволяют выявить детальную структуру течения газа, претерпевающего физико-химические превращения, при наличии в поле течения взаимодействующих сильных и слабых разрывов.

При этом, несмотря на развитие многомерных вычислительных методик, одномерные математические модели сохранили свою практическую ценность, в частности они позволяют путем сравнения численных и экспериментальных результатов верифицировать модели, описывающие неравновесно протекающие химические превращения.

Одномерную математическую модель течения газа в рабочем тракте ударной трубы можно построить, если ввести ряд упрощающих предположений. Такая элементарная теория ударной трубы описывается упрощенной схемой физических процессов (принимаемые при этом предположения приведены далее). Эта упрощенная физическая картина теплофизических процессов в ударной трубе заключается в следующем:

— после принудительного разрыва диафрагмы (при использовании специального технического устройства) рабочий газ, находящийся под большим давлением в камере высокого давления, втекает (сжимая исследуемый газ) в камеру низкого давления, которая заполнена исследуемым (разгоняемым) газом при пониженном давлении;

— по исследуемому газу (камера низкого давления) распространяется УВ, а по рабочему газу — волна разрежения (камера высокого давления);

— после того, как УВ достигает конца трубы, она отражается и движется навстречу рабочему газу;

— далее эта отраженная УВ взаимодействует с контактным разрывом, разделяющим рабочий и исследуемый газы, в результате чего УВ частично отражается (в виде УВ или волны разрежения; критерий, разделяющий эти два случая, приведен далее), а частично преломляется и проходит (в виде УВ) внутрь сжатого слоя рабочего газа.

Здесь необходимо отметить следующее:

- если взаимодействующая с контактным разрывом УВ выходит из более плотной среды в менее плотную, то она отражается от контактного разрыва в виде веера волн разрежения;

- если же УВ выходит из менее плотной среды в более плотную, то отражение происходит в виде УВ.

Картину течения в аэродинамической ударной трубе удобно представить в виде так называемой  $x-t$ -диаграммы (см. рис. 1). На  $x-t$ -диаграмме область 1 соответствует невозмущенному начальному состоянию исследуемого (разгоняемого) газа, область 2 соответствует газу, сжатому в УВ, области 3 и 4 — это области газового “поршня” и невозмущенного начального состояния газа в камере высокого давления до прихода волны разрежения.

Поверхность, обозначенная символом К и разделяющая (между областями 2 и 3) исследуемый (разгоняемый) и рабочий (разгоняющий) газы, носит название контактной поверхности (КП). При этом давление газа и скорость потока по обе стороны от КП равны между собой ( $p_2 = p_3$ ,  $u_2 = u_3$ ). В последующий момент времени УВ и волна разрежения отражаются от торцевых стенок ударной трубы и начинают взаимодействовать друг с другом.

Экспериментальные и расчетно-теоретические исследования, связанные с изучением образования и распространения УВ, волн разрежения и контактных разрывов в рабочем тракте ударных труб, показали, что имеются отклонения от идеализированной одномерной картины течения газа. Например, в большинстве исследованных случаев скорости движения УВ и контактной поверхности практически равны между собой. Близость значений скоростей движения контактной поверхности и УВ вызвана ускорением КП, что, в свою очередь, связано с образованием пограничного слоя (который тормозит УВ) на стенках аэродинамической ударной трубы.

Данный эффект можно объяснить следующим образом: скорость фронта УВ оказывается меньше, а скорость КП больше, чем предсказывает одномерная теория, что, в свою очередь, связано с тем,

что “газовый поршень” (роль которого играет КП), толкающий УВ, не является полностью непроницаемым: поток массы, вытекающий во фронт, вытекает из ударно-сжатой области в пристеночный пограничный слой, и потому масса, сосредоточенная между фронтом УВ и контактной поверхностью, остается постоянной.

Этот эффект наиболее заметен при выполнении условия  $\frac{L}{R} \gg 1$  (где  $L, R$  — длина и радиус ударной трубы), а также при понижении начального давления исследуемого (разгоняемого) газа [1]. В этом случае динамический пограничный слой наиболее интенсивно “вытесняет” поток газа,двигающийся вдоль оси трубы, из области, которая прилегает к стенке трубы. Этот эффект вытеснения потока может быть учтен (в первом приближении) путем использования приближенных уравнений пограничного слоя и квазиодномерных уравнений газовой динамики.

Важным фактором, искажающим одномерную картину течения газа в тракте ударной трубы, является длительность процесса разрушения диафрагмы (время раскрытия диафрагмы, которое зависит от материала диафрагмы, значения давления в камере высокого давления), которая колеблется от 100 до 1000 мкс. Картина течения газа после разрушения центральной части диафрагмы соответствует истечению импульсной струи газа в затопленное пространство. При этом возмущения (УВ или волны сжатия), вызванные истекающей струей в исследуемом (разгоняемом) газе, отражаются от стенок канала ударной трубы и создают пространственные неоднородности в структуре потока, которые приводят к отклонению от идеализированной одномерной картины течения газа.

Важно также, что поверхность контактной границы (отделяющей рабочий и исследуемый газы) неустойчива и с течением времени приобретает сложную пространственную (колоколообразную) форму. При этом газы, находящиеся по разные стороны от контактной границы, могут перемешиваться, что влечет за собой неоднородность (неоднородность) течения газового потока в тракте ударной трубы.

Отметим, что предлагаемые вычислительные алгоритмы, предназначенные для численного моделирования аэротермофизических характеристик ударных труб, должны быть подтверждены методическими расчетами, контролем точности вычислений, сравнением численных результатов с аналитическими решениями и опубликованными расчетными и экспериментальными результатами.

**Одномерный численный метод расчета параметров среды в рабочей области ударной трубы.** Несмотря на одномерный характер задачи, связанной с расчетом многократного прохождения, отражения

(от торцов аэродинамической ударной трубы) и взаимодействия ранее описанной системы волн, она предъявляет повышенные требования к численному методу, используемому при ее решении. Прежде всего расчетная схема должна иметь улучшенные дисперсионные и диссипативные свойства, быть экономичной и алгоритмически простой, монотонной и аппроксимировать гладкие решения с максимально высоким порядком точности.

Этим требованиям удовлетворяет метод численного решения квазиодномерных однотемпературных одножидкостных уравнений газовой динамики, который опирается на метод дробных шагов, состоящий в данном случае из двух шагов [2]. Указанные системы уравнений решаются с помощью разработанного авторами варианта нелинейной квазимоноотонной компактной разностной схемы повышенного порядка точности. Опишем способы численного решения этих дробных шагов.

На первом дробном шаге учитываются газодинамические процессы (этим процессам соответствует “гиперболическая” часть рассматриваемой системы уравнений), возникающие в тракте аэродинамической ударной трубы после разрушения диафрагмы, которая разделяет рабочий и исследуемые газы, на втором дробном шаге учитывается квазиодномерная геометрия установки.

Математическая формулировка первого дробного шага и решение гиперболической части системы уравнений основывается на дивергентной форме и формулируется следующими двумя способами:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\vec{U})}{\partial \xi} = \vec{F}_2, \quad F_\rho = -\rho v \frac{d \ln F}{dz},$$

$$F_{\rho v} = -\rho v^2 \frac{d \ln F}{dz}, \quad F_E = -(\rho E v + v P) \frac{d \ln F}{dz},$$

или

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = L(U), \quad L = -\frac{\partial F(\vec{U})}{\partial \xi} + \vec{F}_2;$$

здесь параметр  $\xi$  может принимать одно из набора значений  $(r, z)$ , вектор решения имеет вид  $\vec{U} = (\rho, \rho u_\xi, \rho E)^\top$ , вектор потоковой переменной записывается в виде  $F(\vec{U}) = (\rho u_\xi, \rho u_\xi^2 + P, \rho E u_\xi + P u_\xi)^\top$ , а вектор правой части представляется как  $\vec{F}_2 = (F_\rho, F_{\rho v}, F_E)^\top$ .

Отметим, что приведенные ранее системы дифференциальных уравнений относительно временной переменной  $t$  — это системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть решены с помощью векторного варианта многоша-

гового метода Рунге–Кутты (в настоящей работе использован четырехшаговый вариант метода [3], который имеет четвертый порядок аппроксимации по времени  $t$ ).

Для этого приведем векторный вариант системы уравнений Эйлера к нормальной форме с выделенной в левой части временной производной  $\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t}$ :

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} = L \left( \vec{U}_i \right),$$

где  $L$  — правая часть системы уравнений Эйлера, не содержит производных по времени. В качестве начального приближения используется решение, полученное на предыдущем шаге по времени. Тогда четырехшаговый вариант метода Рунге–Кутты реализуется в виде следующей последовательности шагов:

$$\vec{U}_i^{(1)} = \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{4} L \left( \vec{U}_i^{(0)} \right) \right],$$

$$\vec{U}_i^{(2)} = \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{3} L \left( \vec{U}_i^{(1)} \right) \right],$$

$$\vec{U}_i^{(3)} = \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} L \left( \vec{U}_i^{(2)} \right) \right],$$

$$\vec{U}_i^{(4)} = \left[ \vec{U}_i^{(0)} + \Delta t L \left( \vec{U}_i^{(3)} \right) \right].$$

Известно, что такой способ поиска решения  $\vec{U}_i$  относительно времени  $t$  позволяет решить одну из проблем численного решения уравнений Эйлера, т.е. необходимость обеспечить положительность искомых функций (если в момент времени  $t^n$  решение является положительным, то оно остается положительным и в момент времени  $t^{n+1}$ ).

Повышение относительно временной переменной  $t$  порядка аппроксимации численного решения уравнений Эйлера до четвертого  $O(\Delta t^4)$  и выше также возможно, если использовать последовательность сеток по временной переменной  $t$  и экстраполяцию по пределу, предложенную Ричардсоном. Экстраполяция Ричардсона имеет следующие особенности:

- возможность использования простейших аппроксимаций дифференциальных задач;
- однородность осуществления алгоритмов на последовательности сеток с различными параметрами аппроксимации;
- простота реализации алгоритма в целом.

Пусть имеется решение рассматриваемой задачи, найденное интегрированием (со вторым порядком аппроксимации  $O(\Delta t^2)$ ) по времени  $t$  с шагом  $\Delta t$  на момент времени  $\hat{t} = t + \Delta t$ , которое обозначим как  $(\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}$ , а также решение (второго порядка аппроксимации  $O(\Delta t^2)$ ), обозначаемое как  $(\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/2}$ , полученное с использованием двух временных шагов (каждый шаг равен  $\Delta t/2$ ) до момента времени  $\hat{t} = t + \Delta t$ .

Тогда линейная комбинация вида

$$\overline{\overline{(\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}}}^{\hat{t}} = \frac{4}{3} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/2}^{\hat{t}} - \frac{1}{3} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}^{\hat{t}}$$

приближает точное решение к четвертому порядку аппроксимации по временной переменной  $O(\Delta t^4)$  [4].

Чтобы точное решение можно было приблизить к шестому или восьмому порядку аппроксимации по временной переменной, следует воспользоваться формулами [5]:

$$\overline{\overline{(\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}}}^{\hat{t}} = \frac{32}{21} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/4}^{\hat{t}} - \frac{4}{7} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/2}^{\hat{t}} + \frac{1}{21} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}^{\hat{t}};$$

$$\overline{\overline{(\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}}}^{\hat{t}} = \frac{512}{315} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/8}^{\hat{t}} - \frac{32}{45} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/4}^{\hat{t}} + \frac{4}{45} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t/2}^{\hat{t}} - \frac{1}{315} (\rho, u, v, P)|_{t+\Delta t}^{\hat{t}}.$$

На первом дробном шаге используется дивергентная форма уравнений Эйлера следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\xi}{\partial \xi} &= F_\rho, \quad \frac{\partial (\rho u_\xi)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_\xi^2 + P)}{\partial \xi} = F_{\rho u}, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E u_\xi + P u_\xi)}{\partial \xi} &= F_E, \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\vec{U})}{\partial \xi} &= \vec{F}_2, \end{aligned}$$

где  $u_\xi = (u, v)$ , параметр  $\xi$  может принимать одно из набора значений  $(r, z)$ , вектор решения имеет вид  $\vec{U} = (\rho, \rho u_\xi, \rho E)^T$ , вектор потоковой переменной записывается в виде  $F(\vec{U}) = (\rho u_\xi, \rho u_\xi^2 + P, \rho E u_\xi + P u_\xi)^T$ , а вектор правой части представляется как  $\vec{F}_2 = (F_\rho, F_{\rho u}, F_E)^T$ . Здесь (для временного дробного шага  $t \in [t, t + \Delta t/2]$ ) применяется нелинейная квазимоноотонная компактная разностная схема повышенного



порядка точности, которая в пространственно гладкой части численного решения позволяет достичь седьмого порядка точности:

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + \frac{F(\vec{U}_{i+1/2}) - F(\vec{U}_{i-1/2})}{\Delta \xi} = \vec{F}_2.$$

Газодинамические параметры  $U_i^{n+1}, U_i^n$  относятся к центрам расчетных ячеек, в то время как потоки  $F_{i\pm 1/2}^n, G_i^n$  необходимо определить на поверхности этих ячеек. При этом для повышения порядка аппроксимации разностной схемы следует восстановить газодинамические параметры  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}, Y_i^{R,L}$  справа (индекс  $R$ ) и слева (индекс  $L$ ) от границ расчетных ячеек. Тогда любая реконструируемая функция  $Y(x), [x = \{\xi\}]$ ,  $\xi \in \left[-\frac{\Delta \xi}{2}, \frac{\Delta \xi}{2}\right]$ , представляется кусочно-полиномиальными распределениями

$$Y(\xi) = Y_i + \left\{ \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i [\xi - \xi_i] + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i [\xi - \xi_i]^2 - \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^3 + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \xi^3} \right)_i [\xi - \xi_i]^3 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i [\xi - \xi_i]^4 - \frac{2}{5!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^5 + \frac{1}{5!} \left( \frac{\partial^5 Y}{\partial \xi^5} \right)_i [\xi - \xi_i]^5 + \frac{1}{6!} \left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_i [\xi - \xi_i]^6 - \frac{2}{7!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^7 \right\},$$

где  $Y_{i+1/2}^R = Y\left(\xi = \frac{\Delta \xi}{2}\right)$ ,  $Y_{i-1/2}^L = Y\left(\xi = -\frac{\Delta \xi}{2}\right)$  и т.д. Отметим, что данные формулы удовлетворяют балансовым соотношениям:

$$Y_i = \frac{1}{\Delta \xi} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} Y(\xi) d\xi.$$

Данные кусочно-полиномиальные распределения следует ограничить (для придания им монотонного вида) некоторой функцией  $\varphi(Y)$  – лимитером [6]:

$$\varphi(Y_i) = \min \left( 1, \frac{|Y_i - \max(Y_k)|}{|Y_i - \max(Y_{k-1/2}, Y_{k+1/2})|}, \frac{|Y_i - \min(Y_k)|}{|Y_i - \min(Y_{k-1/2}, Y_{k+1/2})|} \right)$$

где  $k = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$ ; т.е.

$$Y(\xi) = Y_i + \varphi(Y_i) \left\{ \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i [\xi - \xi_i] + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i [\xi - \xi_i]^2 - \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^3 + \right.$$

$$+ \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \xi^3} \right)_i [\xi - \xi_i]^3 + \frac{1}{4!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i [\xi - \xi_i]^4 - \frac{2}{5!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^5 + \\ + \frac{1}{5!} \left( \frac{\partial^5 Y}{\partial \xi^5} \right)_i [\xi - \xi_i]^5 + \frac{1}{6!} \left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_i [\xi - \xi_i]^6 - \frac{2}{7!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i \left[ \frac{\Delta \xi}{2} \right]^7 \Bigg\}.$$

Входящие в кусочно-полиномиальные распределения  $Y(\xi)$  пространственные производные  $\left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_{i,j}$  вычисляются следующим образом.

Сначала для дискретной функции  $Y_i$  определим приближенное значение  $F_i$  первой частной производной по пространственной переменной  $\xi$  с восьмым порядком точности.

Для этого в каждой ячейке с номером  $i$  для каждой восстанавливаемой величины  $Y_{i,j}$  рассчитывается индекс немонотонности  $Ind(Y)$ :

$$Ind(Y)_i = \frac{\frac{1}{12} |-Y_{i+2,j} + 16Y_{i+1,j} - 30Y_{i,j} + 16Y_{i-1,j} - Y_{i-2,j}|}{\left( \frac{1}{2} |-Y_{i+2,j} + 4Y_{i+1,j} - 3Y_{i,j}| + \frac{1}{2} |3Y_{i,j} - 4Y_{i-1,j} + Y_{i-2,j}| + \theta \right)},$$

где  $\theta$  – малый параметр.

Далее найдем первую производную  $f$  по переменной  $\xi$  по обычной аппроксимационной формуле второго порядка точности и выполним ее “монотонное ограничение” на сетке:

$$\overline{Ind}(Y)_i = 1 \cdot Ind(Y)_i + 2 \cdot [1 - Ind(Y)_i];$$

$$f_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\Delta},$$

$$\tilde{f}_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(\overline{Ind}(Y)_{i+1} |f_{i+1}|, |f_i|, \overline{Ind}(Y)_{i-1} |f_{i-1}|),$$

где  $\Delta$  – шаг пространственной сетки в направлении  $\xi$ . Тогда приближенное “монотонизованное” значение  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным переменным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне  $F_i = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta^6}{2100} + O(\Delta^8)$  можно найти по формуле (т.е. путем решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей):

$$Q_i = \left( E + \frac{\Delta_2}{30} \right) \tilde{f}_i, \tilde{F}_i = \left\{ \left( E + \frac{\Delta_2}{6} \right)^{-1} Q_i \right\}_i;$$

$$\overline{F}_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(|\tilde{F}_{i+1}|, |\tilde{F}_i|, |\tilde{F}_{i-1}|);$$

$$F_i = \overline{F}_i + \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \cdot [1 - Ind(Y)_i] \cdot \left| \tilde{F}_i - \overline{F}_i \right|,$$

где  $\Delta_0 f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ,  $\Delta_2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$ ,  $E$  – единичный оператор. Отметим, что приведенная формула является симметричной конечной разностью шестого порядка точности [7]. Это форма расчета первой производной  $F_i$  используется для формирования краевых условий при нахождении приближенного “монотонизованного” значения  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным переменным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне  $F_i = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta^8}{44100} + O(\Delta^{10})$ . В этом случае вычисления следует проводить следующим образом (на основе решения системы уравнений с пятидиагональной матрицей) [7]:

$$Q_i = \left( E + \frac{5\Delta_2}{42} \right) \tilde{f}_i, \quad \tilde{F}_i = \left\{ \left( E + \frac{2\Delta_2}{7} + \frac{\Delta_2^2}{70} \right)^{-1} Q_i \right\}_i,$$

$$\overline{F}_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min \left( \left| \tilde{F}_{i+1} \right|, \left| \tilde{F}_i \right|, \left| \tilde{F}_{i-1} \right| \right),$$

$$F_i = \overline{F}_i + \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \cdot [1 - \text{Ind}(Y)_i] \cdot \left| \tilde{F}_i - \overline{F}_i \right|.$$

В кусочно-полиномиальных распределениях  $Y(\xi)$  присутствуют пространственные производные второго порядка  $\left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i = s_i$ , которые далее условно обозначим символом  $s_i$  и вычислим с восьмым порядком точности [5]:

$$\begin{aligned} \frac{9}{38} (s_{i+1} + s_{i-1}) + s_i &= -\frac{751}{342\Delta^2} Y_i + \frac{147}{152\Delta^2} (Y_{i+1} + Y_{i-1}) + \\ &+ \frac{51}{380\Delta^2} (Y_{i+2} + Y_{i-2}) - \frac{23}{6840\Delta^2} (Y_{i+3} + Y_{i-3}). \end{aligned}$$

Пространственные производные четвертого  $\left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i = S_i^4$  и шестого  $\left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_{i,j} = S_i^6$  порядков находят из соотношений (т.е. путем решения систем уравнений с трехдиагональной матрицей) [7]:

$$Q_i = \left( \frac{\Delta_2}{6} \right) \tilde{f}_i, \quad \widetilde{S}_i^4 = \left\{ \left[ E - \left( E + \frac{\Delta_2}{6} \right)^{-1} \right] Q \right\}_i;$$

$$S_i^4 = \Delta^4 \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_i - \frac{\Delta^8}{720} + O(\Delta^{10});$$

$$Q_i = \left( \frac{\Delta_2}{12} \right) \tilde{S}_i^4, \quad \widetilde{S}_i^6 = \left\{ \left[ E - \left( E + \frac{\Delta_2}{12} \right)^{-1} \right] Q \right\}_i;$$

$$S_i = \Delta^6 \left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_i - \frac{\Delta^{10}}{180} + O(\Delta^{12}).$$

Остальные производные, входящие в кусочно-полиномиальные распределения, определяют, используя производные  $\left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i$  и  $\left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i$ .

При получении решения, которое описывает переносную часть уравнения (т.е.  $\frac{\partial Y}{\partial t} + V \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0$ ), можно аппроксимировать “восстанавливаемое” распределение с помощью распределения  $Y(\xi, \eta)$ . Тогда можно определить среднее значение  $\tilde{Y}$  функции  $Y(\xi)$  на отдельных отрезках:

для отрезка  $[\xi_{i+1/2} - |V|t, \xi_{i+1/2}]$ , если  $V > 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{i+1/2}^L(|V|t) &= \left( \frac{1}{\Psi} \right) \int_{\xi_{i+1/2}-\Psi}^{\xi_{i+1/2}} Y(\xi) d\xi = Y_{i-1,j} + \\ &+ \varphi(Y_{i-1}) \left\{ -\frac{F_{2,i-1}(\tilde{\psi})}{2!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^2 \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_{i-1} - \right. \\ &- \frac{F_{3,i-1}(\tilde{\psi})}{3!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^3 \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_{i-1} - \frac{2}{3!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_{i-1} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^3 - \\ &- \frac{F_{4,i-1}(\tilde{\psi})}{4!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^4 \left( \frac{\partial^3 Y}{\partial \xi^3} \right)_{i-1} - \frac{F_{5,i-1}(\tilde{\psi})}{5!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^5 \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_{i-1,j} - \\ &- \frac{2}{5!} \left( \frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4} \right)_{i-1} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^5 - \frac{F_{6,i-1}(\tilde{\psi})}{6!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^6 \left( \frac{\partial^5 Y}{\partial \xi^5} \right)_{i-1} - \\ &\left. - \frac{F_{7,i-1}(\tilde{\psi})}{7!} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^7 \left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_{i-1} - \frac{2}{7!} \left( \frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6} \right)_{i-1} \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^7 \right\}; \end{aligned}$$

для отрезка  $[\xi_{i+1/2}, \xi_{i+1/2} + |V|t]$ , если  $V < 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{i+1/2}^R(|V|t) &= \left( \frac{1}{\Psi} \right) \int_{\xi_{i+1/2}}^{\xi_{i+1/2}+\Psi} Y(\xi) d\xi = Y_i + \\ &+ \varphi(Y_i) \left\{ \frac{F_{2,i}(\tilde{\psi})}{2!} \left[ -\frac{\Delta_\xi}{2} \right]^2 \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F_{3,i}(\tilde{\psi})}{3!} \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^3 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}\right)_i - \frac{2}{3!} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}\right)_i \left[\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^3 + \\
& + \frac{F_{4,i}(\tilde{\psi})}{4!} \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^4 \left(\frac{\partial^3 Y}{\partial \xi^3}\right)_i + \frac{F_{5,i}(\tilde{\psi})}{5!} \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^5 \left(\frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4}\right)_{i,j} - \\
& - \frac{2}{5!} \left(\frac{\partial^4 Y}{\partial \xi^4}\right)_i \left[\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^5 + \frac{F_{6,i}(\tilde{\psi})}{6!} \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^6 \left(\frac{\partial^5 Y}{\partial \xi^5}\right)_i - \\
& + \frac{F_{7,i}(\tilde{\psi})}{7!} \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^7 \left(\frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6}\right)_i - \frac{2}{7!} \left(\frac{\partial^6 Y}{\partial \xi^6}\right)_i \left[\frac{\Delta_\xi}{2}\right]^7 \left. \right\},
\end{aligned}$$

где  $\psi = |V|t$ ,  $\tilde{\psi} = 2|V|t/\Delta_\xi = 2\psi/\Delta_\xi$ .

Здесь введены следующие функции (обозначение  $\tilde{\Psi}^m$ , встречающееся в приведенных далее формулах, означает возведение величины  $\tilde{\Psi}$  в степень  $m$ ):

$$F_2(\tilde{\psi}) = -2\tilde{\Psi}^0 + \tilde{\Psi}^1;$$

$$F_3(\tilde{\psi}) = -3\tilde{\Psi}^0 + 3\tilde{\Psi}^1 - \tilde{\Psi}^2;$$

$$F_4(\tilde{\psi}) = -4\tilde{\Psi}^0 + 6\tilde{\Psi}^1 - 4\tilde{\Psi}^2 + \tilde{\Psi}^3;$$

$$F_5(\tilde{\psi}) = -5\tilde{\Psi}^0 + 10\tilde{\Psi}^1 - 10\tilde{\Psi}^2 + 5\tilde{\Psi}^3 - \tilde{\Psi}^4;$$

$$F_6(\tilde{\psi}) = -6\tilde{\Psi}^0 + 15\tilde{\Psi}^1 - 20\tilde{\Psi}^2 + 15\tilde{\Psi}^3 - 6\tilde{\Psi}^4 + \tilde{\Psi}^5;$$

$$F_7(\tilde{\psi}) = -7\tilde{\Psi}^0 + 21\tilde{\Psi}^1 - 35\tilde{\Psi}^2 + 35\tilde{\Psi}^3 - 21\tilde{\Psi}^4 + 7\tilde{\Psi}^5 - \tilde{\Psi}^6.$$

При получении решения, которое описывает переносную часть уравнения (т.е.  $\frac{\partial c}{\partial t} + V\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ ), можно также восстановить кусочно-полиномиальными распределениями  $Y(x)$ ,  $[x = \{\xi\}]$ ,  $\xi \in \left[-\frac{\Delta_\xi}{2}, \frac{\Delta_\xi}{2}\right]$ , аппроксимировать параболой  $q(x) = q_i^L + \xi(\Delta q_i + q_i^6(1 - \xi))$ , где  $\xi = (x - x_{i-1/2})h^{-1}$ ,  $\Delta q_i = q_i^R - q_i^L$ ,  $q_i^6 = 6(q_i - (1/2)(q_i^L + q_i^R))$ ,  $q_i^L = \tilde{Y}_{i+1/2}^L(|V|t)$ ,  $q_i^R = \tilde{Y}_{i+1/2}^R(|V|t)$ .

Тогда можно определить среднее значение  $\tilde{q}$  функции  $q(x)$  на отдельных отрезках:

- для отрезка  $[x_{i+1/2} - |V|t, x_{i+1/2}]$ , если  $V > 0$ :

$$\tilde{q}_{i+1/2}^L(y) = q_i^R - (1/2)yh^{-1}(\Delta q_i - q_i^6(1 - (2/3)yh^{-1})), \quad y = Vt;$$

- для отрезка  $[x_{i+1/2}, x_{i+1/2} + |V|t]$ , если  $V < 0$  :

$$\tilde{q}_{i+1/2}^R(y) = q_{i+1}^L + (1/2)yh^{-1}(\Delta q_{i+1} + q_{i+1}^6(1 - (2/3)yh^{-1})), \quad y = -Vt.$$

Отметим, что распределение  $q(x)$  связано с ранее приведенным распределением  $Y$  формулами:  $\Delta q_i = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)_i$ ,  $q_i^6 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2}\right)_i$ .

В результате получается численный метод решения квазиодномерных уравнений газовой динамики (хорошо физически обусловленный), который опирается на метод предиктор-корректор и вариант нелинейной квазимонотонной компактной разностной схемы повышенного порядка точности. В этом случае для этапа “предиктор” используется система квазиодномерных уравнений Эйлера в обобщенной недивергентной характеристической форме, в которой неизвестные величины записаны относительно квазиинвариантов Римана. На этапе “корректор” используется дивергентная форма квазиодномерных уравнений Эйлера.

Шаг по времени  $\Delta t$ , необходимый для интегрирования приведенной ранее дифференциально-разностной схемы, выбирается из условия выполнения критерия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви.

Для аппроксимации вторых производных, которые входят в “вязкую” часть системы уравнений динамического и теплового пограничного слоя, использовалось конечно-разностное представление производных вида  $(\mu f)'_z$  на введенной ранее сетке следующими формулами [7]:

$$\begin{aligned} (\mu f)'_z &\approx \frac{[\mu_{i-1}f'_{i-1} + 8(\mu_{i+1/2}f'_{i+1/2} - \mu_{i-1/2}f'_{i-1/2}) - \mu_{i+1}f'_{i+1}]}{6\Delta}; \\ \mu_{i\pm 1/2} &= \frac{[\mu_{i\pm 2} + 9(\mu_i + \mu_{i\pm 1}) - \mu_{i\mp 1}]}{16}; \\ f'_{i\pm 1/2} &\approx \frac{[27(\mp f_i \pm f_{i\pm 1}) \pm (f_{i\mp 1} \mp f_{i\pm 2})]}{12\Delta}; \\ f'_{i\pm 1/2} &\approx \frac{[\mp f_{i\mp 2} \pm 6f_{i\mp 1} \mp 18f_i \pm 10f_{i\pm 1} \pm 3f_{i\pm 2}]}{12\Delta}. \end{aligned}$$

Смешанные производные  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \frac{\partial f}{\partial y} \right]_{i,j}$  приближались известными центральными разностями четвертого порядка (или приведенными формулами):  $(\mu f)'_z \approx \frac{[f_{i-2} + 8(f_{i+1} - f_{i-1}) - f_{i+2}]}{12\Delta}$ . Эффективность применения при аппроксимации “вязких” членов уравнений пограничного слоя операторов высокого порядка точности особенно заметен в задачах, связанных расчетом аэродинамических ударных труб.

Используем оператор сдвига  $T_m u_j = u_{j+m} = u(z_j + m\Delta)$  и обозначение единичного оператора  $E = T_0$  для определения производных вида  $\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R}, \left. \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right|_{r=R-\delta}$  на границе расчетной области:

$$u'|_{r=R} = \frac{1}{60\Delta} [-12T_{-5} + 75T_{-4} - 200T_{-3} + 300T_{-2} - 300T_{-1} + 137E] + \frac{\Delta^5}{6} u^{VI};$$

$$u'|_{r=R} = \frac{1}{60\Delta} [10T_{-6} - 72T_{-5} + 225T_{-4} - 400T_{-3} + 450T_{-2} - 360T_{-1} + 147E] + \frac{\Delta^6}{7} u^{VII};$$

$$u'|_{r=R-\delta} = \frac{1}{60\Delta} [12T_5 - 75T_4 + 200T_3 - 300T_2 + 300T_1 - 137E] + \frac{\Delta^5}{6} u^{VI};$$

$$u'|_{r=R-\delta} = \frac{1}{60\Delta} [-10T_6 + 72T_5 - 225T_4 + 400T_3 - 450T_2 + 360T_1 - 147E] + \frac{\Delta^6}{7} u^{VII}.$$

**Основные результаты расчетов.** Расчетные исследования выполнены с использованием разработанной численной методики для экспериментальных условий (таблица), реализованных в однодиафрагменной аэродинамической ударной трубе (ГУАТ ИПМех РАН) [8, 9]. В экспериментах, проведенных на данной ударной трубе и подвергаемых численному анализу, в начальный момент времени (т.е. до разрыва диафрагмы) камера низкого давления (КНД) была заполнена воздухом (исследуемым газом) при давлении  $p_{КНД}$  [мбар] и температуре  $T = 298,15$  К, а камера высокого давления (КВД) наполнена сжатым воздухом при давлении  $P_{КВД}$  [мбар] и температуре  $T = 298,15$  К. Экспериментальная установка ГУАТ ИПМех РАН имеет вид канала (трубы) постоянного сечения (внутренний диаметр  $D = 0,8$  м; длина камеры низкого давления  $L_{КНД} = 7,35$  м; длина камеры высокого давления  $L_{КВД} = 1,97$  м) и рассчитана на диапазон значений чисел Маха УВ  $M = 6 \dots 12$ ].

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p_{КВД}$ , бар	10	10,2	22	19	13,2	19,5	19,5	20,5	21	36	34
$p_{КНД}$ , бар	0,3	15	6,6	100	2	0,7	5,6	100	100	1	1

На рис. 2 приведено схематичное изображение расположения датчиков давления, служащих для нахождения экспериментальных зависимостей давления  $P(t)$  (в различных пространственных точках) от времени.

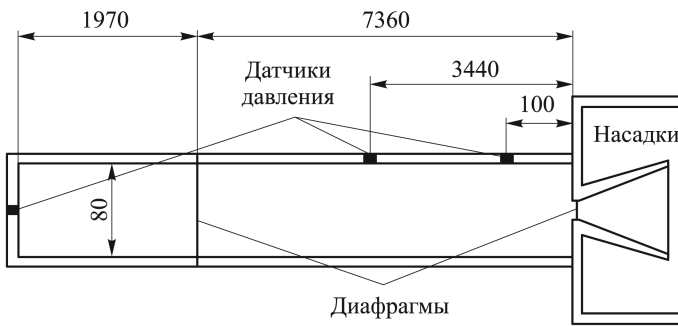


Рис. 2. Схема расположения датчиков давления в однодиафрагменной аэродинамической ударной трубе (ГУАТ ИПМех РАН)

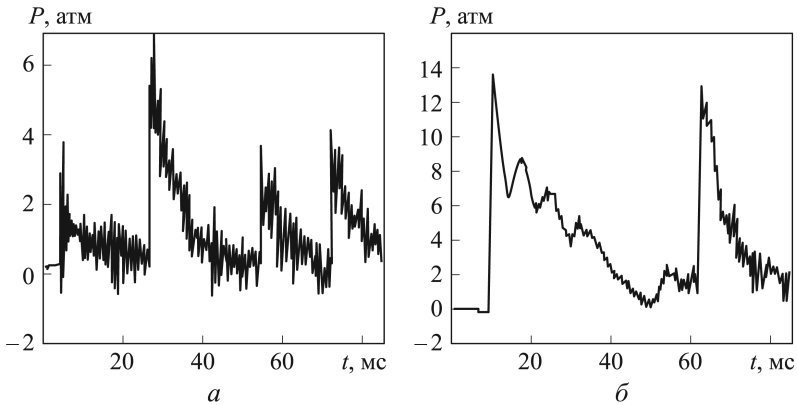


Рис. 3. Экспериментальные временные зависимости для второго (а) и третьего (б) датчиков давления (эксперимент № 4)

На рис. 3 показаны экспериментальные (эксперимент № 4) временные зависимости давления  $P(t)$  для второго и третьего датчиков давления (датчик давления № 1 находится у правой торцевой плоскости ударной трубы (ГУАТ ИПМех РАН, см. рис. 2).

Из приведенных на рис. 3 графиков следует, что можно оценить (по моментам времени прихода УВ к датчикам давления) лишь газодинамические параметры за фронтом первоначальной УВ (датчик № 2:  $z = 5,78$  м,  $t = 8,92$  мс; датчик № 3:  $z = 9,22$  м,  $t = 14$  мс):

$$D_{УВ} \approx 0,7 \text{ км/с}, u_2 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} D_{УВ} \approx 0,6 \text{ км/с}, p_2 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \rho_1 D_{УВ}^2 \approx 0,5 \text{ атм.}$$

Из графической зависимости датчика давления № 2 ( $z = 5,78$  м) также следует, что наблюдаемый максимум амплитуды соответствует не начальному приходу УВ, т.е. не моменту времени  $t \approx 9$  мс, а более позднему моменту времени  $t \approx 30$  мс.

Это явление, по-видимому, связано с тем, что в момент времени  $t \approx 30$  мс в точке, где установлен датчик № 2 (приблизительно около центра расчетной области), усиление УВ при ее отражении от торцевых поверхностей аэродинамической ударной трубы существенно

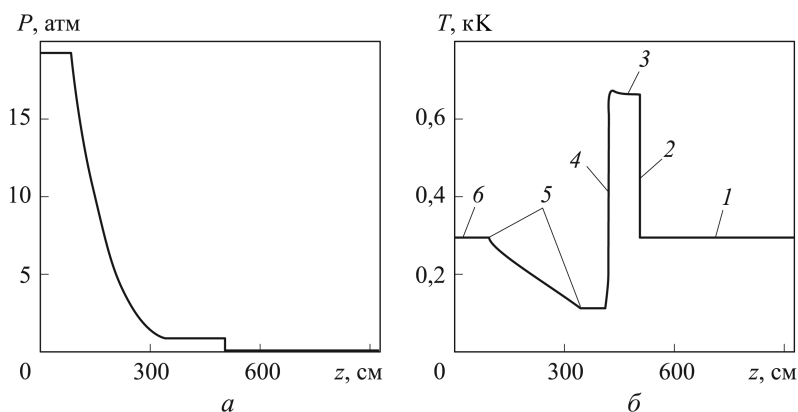


больше, чем ее ослабление при взаимодействии с волнами разрежения. Данные графические зависимости показывают также, что дальнейшее (относительно времени) волновое движение газа в ударной трубе приводит к затуханию УВ и переходу течения в движение акустических волн.

Таким образом, можно отметить, что нестационарное течение газа в аэродинамической ударной трубе имеет ряд особенностей, которые требуют более подробного численного изучения. Анализ особенностей течения в ударной трубе ГУАТ ИПМех РАН на первоначальной стадии изучения целесообразно провести, используя приближенную одномерную модель, элементы которой приведены в настоящей работе.

При построении приближенной одномерной модели использовалась схема расчетной области, соответствующая рис. 2. С левой стороны расчетной области располагается торцевая стенка аэродинамической ударной трубы, на которой задается граничное условие “непротекания” газовой среды через твердую преграду. С правой стороны области интегрирования также используется граничное условие “непротекания”. Таким образом в расчетах было приближенно принято, что с левой стороны ударная труба ограничена твердой стенкой (в действительности в аэродинамической ударной трубе (ГУАТ ИПМех РАН, см. рис. 2), здесь располагается сопло Лаваля).

Образующаяся начальная структура течения газа после прорыва диафрагмы показана на рис. 4 и описана в пояснениях к нему. Эта структура течения газа соответствует фазе автономного распространения в пространстве системы волн и длится в течение интервала времени  $0 \leq t \leq 0,85$  мс. Как известно [10], интенсивность УВ принято характеризовать безразмерным параметром, называемым амплитудой



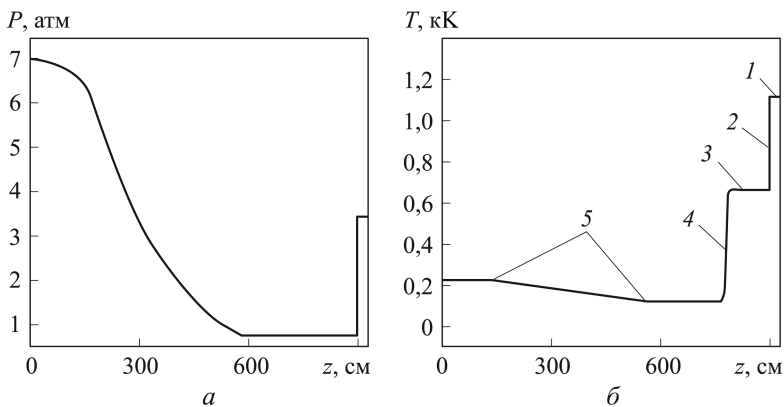
**Рис. 4. Пространственное распределение давления (а) и температуры (б) в момент времени  $t = 3,4$  мс после разрыва диафрагмы (эксперимент № 4):**

1 — невозмущенный исследуемый газ; 2 — фронт УВ; 3 — область ударно-сжатого исследуемого газа; 4 — фронт контактной границы; 5 — пространственная область, занятая в рабочем газе волной разрежения; 6 — пространственная область, соответствующая начальному состоянию рабочего газа в камере высокого давления

УВ:  $Z = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2}$ . Уровень значений температуры и давления за фронтом УВ на этой фазе определяется величинами  $T \approx 0,7$  кК,  $p \approx 0,7$  атм. В окрестности границ расчетной зоны газ не возмущен и соответствует начальным условиям (правая граница —  $T = 298,15$  К,  $p = 19$  атм; левая граница —  $T = 298,15$  К,  $p = 0,1$  атм). Следующая структура течения наблюдается в течение интервала времени  $0,85 \leq t \leq 10,3$  мс и отвечает фазе первоначального взаимодействия УВ и волн разрежения с твердой преградой.

Результат отражения УВ от твердой преграды, которая располагается с правой стороны области интегрирования, показан на рис. 5. Известно, что наиболее существенной особенностью процесса взаимодействия УВ с твердой преградой является усиление УВ после ее отражения от преграды [10]. Удобно характеризовать этот процесс отражения УВ соответствующим коэффициентом усиления:  $K = \frac{\Delta p_3}{\Delta p_2}$ , где  $\Delta p_3 = p_3 - p_1$  — избыточное давление в отраженной УВ,  $\Delta p_2 = p_2 - p_1$  — избыточное давление в падающей УВ.

Из графических зависимостей, приведенных на рис. 3, следует, что столкновение УВ с твердой преградой приводит к заметному усилению отраженной УВ: коэффициент усиления равен  $K \approx 6$  (напомним, что для воздуха максимальное значение коэффициента усиления равно  $K = 8$ ). Значение амплитуды отраженной УВ  $Z \approx 24$ , температура и давление у правой расчетной границы возрастают до значений  $T \approx 1,2$  кК,  $p \approx 3,5$  атм. К этому моменту времени веер волн разрежения отразился от левой расчетной границы и продвинулся дальше, чем на половину внутрь расчетной зоны. При этом температура и давление у левой границы упали до значений  $T \approx 0,2$  кК,  $p \approx 7$  атм.



**Рис. 5. Пространственное распределение давления (а) и температуры (б) в момент времени  $t = 9,1$  мс (эксперимент № 4):**

1 — ударно-сжатый исследуемый газ за отраженной УВ; 2 — фронт отраженной УВ; 3 — область первоначально ударно-сжатого исследуемого газа; 4 — фронт контактной границы; 5 — пространственная область, занятая в рабочем газе волной разрежения

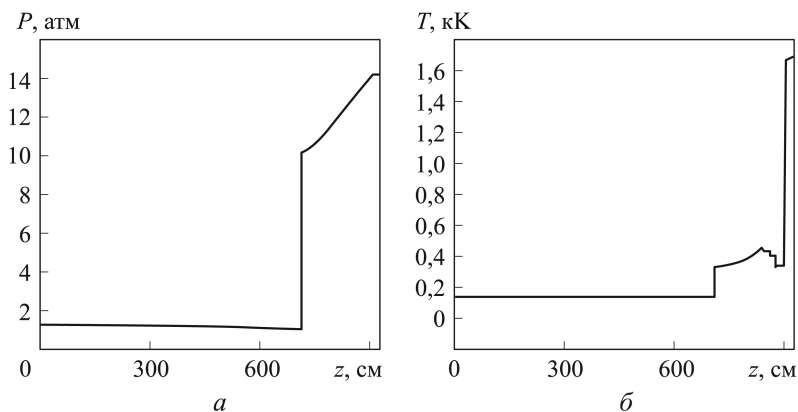


Рис. 6. Пространственное распределение давления (а) и температуры (б) в момент времени  $t = 21$  мс (эксперимент № 4)

Далее в основном у правой расчетной границы наблюдается структура течения (рис. 6), соответствующая фазе сложного взаимодействия УВ, контактного разрыва, волны разрежения, которая длится (приблизительно) в течение  $10,3 \leq t \leq 10,3 + \frac{L_{\text{КВД}} + L_{\text{КНД}}}{c_1} \approx 35$  мс. На начальной стадии данной фазы течения в аэродинамической ударной трубе в окрестности правой расчетной границы взаимодействуют только отраженная УВ и контактный разрыв, который движется ей навстречу.

В этом случае возможны два варианта взаимодействия: а) если взаимодействующая с контактным разрывом УВ выходит из более плотной среды в менее плотную, то она отражается от контактного разрыва в виде веера волн разрежения; б) если же наоборот — из менее плотной среды в более плотную среду, то отражение происходит в виде УВ.

В проведенных расчетах реализуется вариант взаимодействия (а), и веер волн разрежения многократно отражается от стенки ударной трубы и контактного разрыва. Чуть позже процесс взаимодействия волн усложняется вследствие влияния на него отраженной от левой границы волны разрежения. При этом температура и давление у левой границы выровнены и уменьшили свои значения по сравнению с предыдущей фазой течения  $T \approx 0,15$  кК,  $p \approx 1,5$  атм.

Следующая структура течения (рис. 7) наблюдается с момента времени 35 мс и соответствует фазе вторичного взаимодействия отраженной от левой расчетной границы (твердой преграды) УВ. Данные графические зависимости показывают, что волновое движение газа в ударной трубе приводит к относительно слабому затуханию УВ. Значения амплитуды отраженной УВ и давления в окрестности левой границы находятся на относительно высоком уровне  $z \approx 80$ ,  $p \approx 12$  атм, но температура снижена до  $T \approx 0,4$  кК. К этому моменту времени в большей части расчетной зоны давление и температура имеют практически одинаковые, но высокие по сравнению с начальными условиями

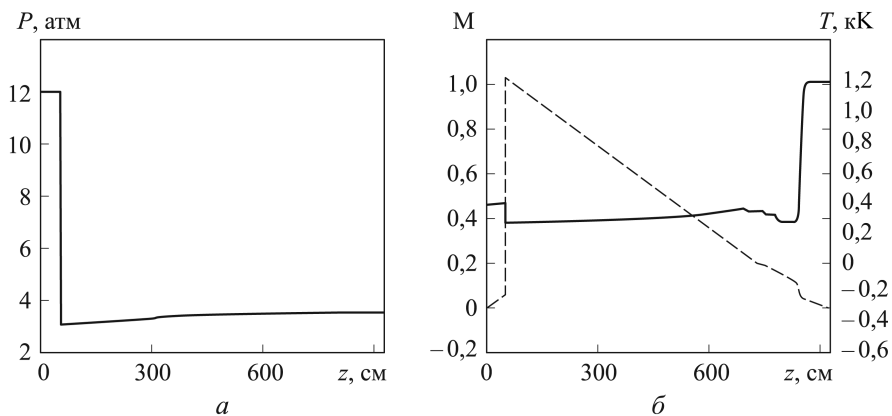


Рис. 7. Пространственное распределение давления (а), числа Маха  $M$  (б) (штриховая линия), температуры (сплошная линия) в момент времени  $t = 42$  мс (эксперимент № 4)

в камере низкого давления значения  $T \approx 0,4$  кК,  $P \approx 3,5$  атм. Это объясняется тем, что в тракте аэродинамической ударной трубы активно идут процессы релаксации. Интересно, что если бы процессы выравнивания в тракте аэродинамической трубы полностью закончились, то в нем бы установились значения термодинамических параметров  $T \approx 0,12$  кК,  $p \approx 1,63$  атм.

Отметим, что предлагаемый вычислительный алгоритм, который предназначен для численного моделирования аэротермофизических характеристик аэродинамических ударных труб, необходимо сравнить с опубликованными расчетными и экспериментальными результатами.

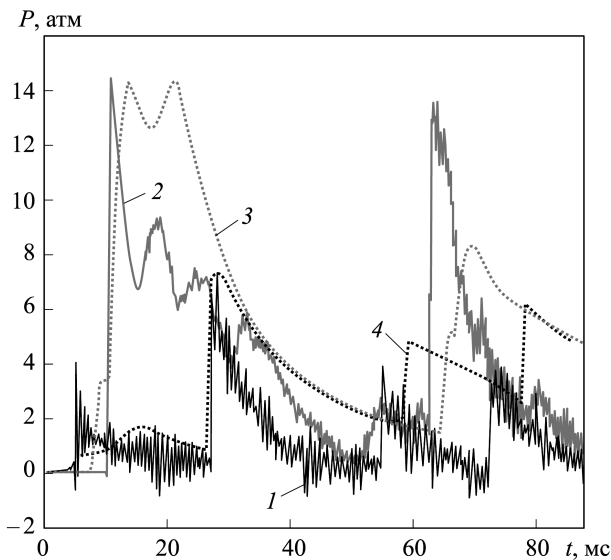


Рис. 8. Экспериментальные (1 и 2) и расчетные (3 и 4) временные зависимости для второго (1 и 4) и третьего (2 и 3) датчиков давления (эксперимент № 4) (штриховая линия – расчет; сплошная линия – эксперимент)

С этой целью было проведено сопоставление экспериментальных и расчетных временных зависимостей (рис. 8), полученных для датчиков давления № 2 и № 3. Из графиков экспериментальных зависимостей (1, 2) следует, что первый (а для датчика № 2 — первый и второй) периоды изменения давления  $P(t)$  заметно отличаются от последующих периодов. Такое отличие периодов, по-видимому, связано с “переходными” процессами (которые могут быть вызваны истечением газа через сопло Лаваля и различными факторами, искажающими одномерную картину течения в тракте ударной трубы), протекающими на начальной стадии в ударной трубе. Сравнение экспериментальных и расчетных графических зависимостей (см. рис. 8) позволяет отметить удовлетворительное совпадение между ними.

**Выводы.** Разработаны численная методика и вычислительный код для нестационарных одномерных радиационно-магнитогазодинамических моделей, предназначенных для описания теплофизических процессов в различных типах ударных труб. Численное решение приведенной в работе нестационарной радиационно-магнитогазодинамической модели базируется на методе расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Решение расщепленных уравнений находится с помощью разработанной нелинейной квази-монотонной компактной разностной схемы повышенного порядка точности, которая в пространственно гладкой части численного решения позволяет достигнуть седьмого порядка точности. Предложенный в работе математический аппарат может быть применен для решения более сложных уравнений Рейнольдса. Решение сформулированной проблемы будет стимулировать дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования ударных труб.

*Работа выполнена в лаборатории радиационной газовой динамики Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН в рамках программ фундаментальных исследований РАН.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Исследование гиперзвуковых течений // Сб. статей под ред. Ф.Р. Ридделла. М.: Мир, 1964. 544 с.*
2. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. М.: Наука, 1981. 304 с.*
3. *Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 364 с.*
4. *Марчук Г.И., Шайдулов В.В. Повышение точности решения разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.*
5. *Довгилевич Л.Е., Софронов И.Л. О применении компактных схем для решения волнового уравнения, М. Препринт № 84 ИПМ АН СССР. 2008. 27 с.*
6. *Barth T.J. On instructed grids and solvers in Computational Fluid Dynamics (Von Karman Institute for Fluid Dynamics. 1990), Lecture Series 1990-04.*

7. Савельев А.Д. Составные компактные схемы высокого порядка для моделирования течения вязкого газа // ЖВМ и МФ. 2007. Т.47. № 8. С. 1387–1401.
8. Котов М.А., Кузенов В.В. Обзорный анализ экспериментальных исследований, выполненных с помощью некоторых типов ударных труб. М.: ИПМех РАН. Препринт № 1044. 2013. 75 с.
9. Kotov M.A., Kryukov I.A., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I., Surzhikov S.T. Experimental Investigation of an Aerodynamic Flow of Geometrical Models in Hypersonic Aerodynamic Shock Tube // AIAA Wind Tunnel and Flight Testing Aero II, San Diego, June 24–27 2013.
10. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

## REFERENCES

- [1] Riddell Frederik R. Hypersonik flow research. New York-London, Acad. press, 1962. 513 p. (Russ. ed.: Issledovanie giperzvukovykh techenii. Sb. statei pod red. F.R. Riddella. Moscow, Mir Publ., 1964. 544 p.).
- [2] Kovenia V.M., Ianenko N.N. Metod rasshchepleniia v zadachakh gazovoi dinamiki [Splitting method in problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 304 p.
- [3] Volkov K.N., Emel'ianov V.N. Modelirovanie krupnykh vikhrei v raschetakh turbulentnykh techenii [Large eddy simulation (LES) for the turbulent flow calculations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 364 p.
- [4] Marchuk G.I., Shaidurov V.V. Povyshenie tochnosti resheniia raznostnykh skhem [Accuracy increase of solution of difference scheme]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.
- [5] Dovgilevich L.E., Sofronov I.L. O primenenii kompaktnykh skhem dlia resheniia volnovogo uravneniia [On application of compact schemes for solving the wave equation]. Moscow, preprint no. 84 of the Keldysh institute of applied mathematics, IPM im. M.V. Keldysha Publ., 2008. 27 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-84> (accessed 30.08.2013).
- [6] Barth T.J. On instructed grids and solvers in Computational Fluid Dynamics. Belgian, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1990, Lecture Notes Series 1990-04.
- [7] Savel'ev A.D. High-order composite compact schemes for simulation of viscous gas flows. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [J. of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2007, vol. 47, No. 8, pp. 1387–1401 (in Russ.).
- [8] Kotov M.A., Kuzenov V.V. Obzornyi analiz eksperimental'nykh issledovani, vypolnennykh s pomoshch'iu nekotorykh tipov udarnykh trub. [A review of experimental investigations performed using some types of shock tubes]. Moscow, preprint no. 1044 of RAS Appl. Mech. Inst., IPMech RAN Publ., 2013. 75 p.
- [9] Kotov M.A., Kryukov I.A., Ruleva L.B., Solodovnikov S.I., Surzhikov S.T. Experimental Investigation Of An Aerodynamic Flow Of Geometrical Models In Hypersonic Aerodynamic Shock Tube. *Proc. AIAA Wind Tunnel and Flight Testing Aero II*, San Diego, June 24–27, 2013, no. 2013-2931. Available at: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2013-2931> (accessed 30.08.2013).
- [10] Ovsiannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow, Nauka, Publ., 1981. 368 p.

Статья поступила в редакцию 30.08.2013

Виктор Витальевич Кузенов — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории “Радиационная газовая динамика” ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор более 110 научных работ в области теплофизики и радиационной газовой динамики.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101.

V.V. Kuzenov — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor, senior researcher of “Radiative Gas Dynamics” laboratory of the Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Author of more than 110 publications in the field of thermal physics and radiative gas dynamics.

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, prospekt Vernadskogo 101, Moscow, 119526 Russian Federation.

Михаил Алтаевич Котов — сотрудник лаборатории “Радиационная газовая динамика” ИПМех им. Ю.А. Ишлинского РАН. Автор 15 научных работ в области аэротермофизики.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101.

M.A. Kotov — researcher of “Radiative Gas Dynamics” laboratory of the Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Author of 15 publications in the field of aerothermophysics.

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, prospekt Vernadskogo 101, Moscow, 119526 Russian Federation.