

УДК 539.3

А. Е. Белкин, В. В. Семенов,
В. К. Семенов**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ БОЛЬШИХ ПЛОСКИХ
ДЕФОРМАЦИЙ АРОЧНОГО АМОРТИЗАТОРА**

Представлены определяющие соотношения инкрементальной теории расчета больших плоских деформаций резиновой детали арочного амортизатора. Для описания упругости резины применена модель сжимаемого неогукковского материала. Приведены результаты расчета нагрузочных характеристик амортизаторов и полей напряжений в резиновой детали. Проанализировано влияние малой сжимаемости резины на расчетные характеристики амортизаторов.

E-mail: a_belkin@newmail.ru

Ключевые слова: резиновые амортизаторы, большие деформации, нагрузочные характеристики, численные методы.

Арочные амортизаторы (рис. 1) применяются для виброизоляции оборудования на судах и плавсредствах различного назначения. Для обеспечения требуемых характеристик амортизаторов необходимо располагать методом расчета резиновых деталей амортизаторов при больших деформациях.

В работах [1, 2] расчеты арочных амортизаторов выполнялись с помощью метода Л.В. Канторовича с предсказанием закона изменения перемещений точек резиновой полосы по одному из направлений. Резина рассматривалась как неогукковский материал, т.е. несжимаемый

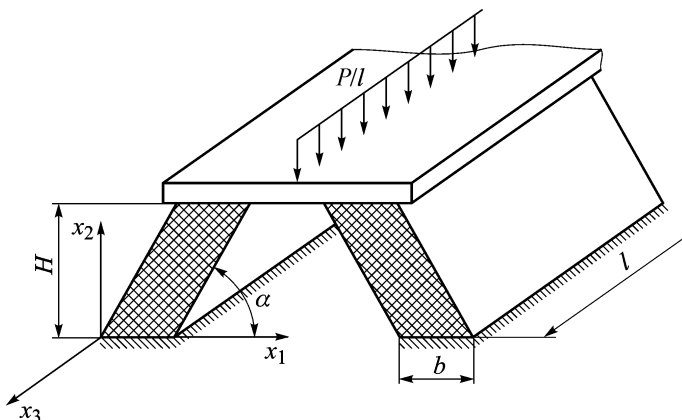


Рис. 1. Арочный амортизатор

материал с упругим потенциалом Трелоара [3]. Модель несжимаемого материала обеспечивает достаточную точность, если напряженное состояние резиновой детали характеризуется невысокими значениями компонент шарового тензора напряжений при существенных компонентах девиатора. В низких амортизаторах вследствие стеснения поперечных деформаций большой объем резины может находиться в условиях всестороннего сжатия. Поэтому предположение об абсолютной несжимаемости резины может привести к значительной погрешности при вычислении жесткости амортизатора.

Для детального анализа поведения амортизатора под нагрузкой, включающего в себя расчет напряжений и деформаций с учетом малой сжимаемости резины, необходимо применение метода конечных элементов (МКЭ).

Рассмотрим большие деформации резиновой детали амортизатора, происходящие в плоскости декартовых координат x_1, x_2 (см. рис. 1). Для расчета используем инкрементальную теорию конечно-элементного анализа больших деформаций [4–7]. Все компоненты исследуемого напряженно-деформированного состояния считаем зависящими от параметра нагружения t (условного времени). Координаты произвольной точки резиновой полосы амортизатора в недеформированном состоянии, т.е. в момент времени 0, обозначим как 0x_i ($i = 1, 2, 3$), координаты той же материальной точки в деформированном состоянии в момент времени t — как tx_i . Недеформированное состояние детали принимаем за отсчетную конфигурацию, в метрике которой формулируются все уравнения задачи. При плоской деформации ${}^tx_1({}^0x_1, {}^0x_2)$, ${}^tx_2({}^0x_1, {}^0x_2)$, ${}^tx_3 = {}^0x_3$.

Для описания деформированного состояния введем градиент вектора места ${}^t\mathbf{F}$, компоненты которого образуют матрицу

$$[{}^tF_{ij}] = \left[\frac{\partial {}^tx_i}{\partial {}^0x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^tx_1}{\partial {}^0x_1} & \frac{\partial {}^tx_1}{\partial {}^0x_2} & 0 \\ \frac{\partial {}^tx_2}{\partial {}^0x_1} & \frac{\partial {}^tx_2}{\partial {}^0x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Через градиент места выразим тензор меры деформаций Коши–Грина

$${}^t\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F}$$

и тензор деформаций Грина–Лагранжа

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}({}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F} - \mathbf{I}),$$

где \mathbf{I} — единичный тензор, точкой обозначено скалярное произведение тензоров.

В качестве основного уравнения задачи равновесия рассмотрим уравнение принципа виртуальных работ, записанное в отсчетной конфигурации:

$$\int_{0V} {}^t\mathbf{S} : \delta^t \boldsymbol{\varepsilon} d^0V = \delta^t W_{ext}, \quad (1)$$

где ${}^t\mathbf{S}$ — второй тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа; 0V — объем тела в недеформированном состоянии; $\delta^t W_{(ext)}$ — виртуальная работа внешних сил; символ $:$ обозначает двойное скалярное произведение тензоров.

В соответствии с идеей инкрементального метода предполагается, что на малом шаге нагружения t , $t + \Delta t$ малыми являются приращения компонент тензора напряжений и тензора деформаций

$$\Delta \mathbf{S} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} - {}^t\mathbf{S}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} - {}^t\boldsymbol{\varepsilon};$$

связь между ними может быть линеаризована:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{E} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon},$$

где \mathbf{E} — тензор секущих модулей упругости для рассматриваемого шага нагружения.

В первом приближении секущие модули упругости заменяются касательными модулями $\mathbf{E} \approx {}^t\mathbf{E} = \frac{\partial {}^t\mathbf{S}}{\partial {}^t\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Для шага нагружения Δt проводится линеаризация уравнения (1) в окрестности предположительно известного состояния t по отношению к малым приращениям перемещений $\Delta u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^t x_i$ ($i = 1, 2$).

Линеаризованное уравнение виртуальных работ имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \int_{0V} ({}^t\mathbf{E} : \Delta \mathbf{e}) : \delta \Delta \mathbf{e} d^0V + \int_{0V} {}^t\mathbf{S} : \delta \Delta \boldsymbol{\eta} d^0V = \\ = \delta {}^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_{0V} {}^t\mathbf{S} : \delta \Delta \mathbf{e} d^0V, \quad (2) \end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{e}$, $\Delta \boldsymbol{\eta}$ — соответственно линейная и квадратичная относительно приращений перемещений части тензора $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\eta}$ с компонентами

$$\begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + {}^t u_{k,i} \Delta u_{k,j} + {}^t u_{k,j} \Delta u_{k,i}), \\ \Delta \eta_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}. \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение (2) составлено для того случая нагружения, когда внешние силы не зависят от перемещений, и поэтому не возникает задачи линеаризации выражения виртуальной работы внешних

сил $\delta^{t+\Delta t} W_{ext}$. Именно такое нагружение рассматривается при расчете амортизатора.

Уравнение (2) используется для нахождения первого приближения $\Delta u_i^{(1)}$ к точным значениям приращений перемещений на шаге нагружения. Добавляя полученные приращения $\Delta u_i^{(1)}$ к уже накопленным перемещениям ${}^t u_i$, получаем ${}^{t+\Delta t} u_i^{(1)}$. По найденным перемещениям, используя геометрические соотношения, вычисляют деформации ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}^{(1)}$, а затем с помощью уравнений состояния и напряжения ${}^{t+\Delta t} S_{ij}^{(1)}$.

Ошибка такого вычисления (невязка уравнения виртуальных работ) составляет

$$R = \delta^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_{0V} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^{(1)} : \delta^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} d^0V.$$

Для уменьшения невязки после каждого шага нагружения осуществляется итерационный процесс, исполняемый до тех пор, пока разница между работами внешних и внутренних сил не окажется меньше заданного малого значения.

Полагая, что на итерации $k + 1$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)} + \tilde{\Delta} \mathbf{u}^{(k+1)},$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} + \tilde{\Delta} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)} + \tilde{\Delta} \boldsymbol{\eta}^{(k+1)},$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^{(k+1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{E}^{(k)} : (\tilde{\Delta} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)} + \tilde{\Delta} \boldsymbol{\eta}^{(k+1)}),$$

($\tilde{\Delta} \mathbf{u}^{(k+1)}$, $\tilde{\Delta} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)}$, $\tilde{\Delta} \boldsymbol{\eta}^{(k+1)}$ — малые уточнения перемещений и деформаций), приходим к уравнению метода Ньютона

$$\begin{aligned} \int_{0V} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{E}^{(k)} : \tilde{\Delta} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)}) : \delta \tilde{\Delta} \boldsymbol{\epsilon}^{(k+1)} d^0V + \int_{0V} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^{(k)} : \delta \tilde{\Delta} \boldsymbol{\eta}^{(k+1)} d^0V = \\ = \delta^{t+\Delta t} W_{(ext)} - \int_{0V} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^{(k)} : \delta^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}^{(k)} d^0V. \quad (3) \end{aligned}$$

После достижения равновесия по найденным напряжениям Пиолы–Кирхгофа определяются истинные напряжения в материале ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ (напряжения Коши) с помощью следующего преобразования:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^T / {}^{t+\Delta t} J,$$

где ${}^{t+\Delta t} J = d^{t+\Delta t} V / d^0V = \det[{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}]$ — мера объемной деформации материала.

В настоящей работе в качестве модели упругого поведения резины рассматривается модель сжимаемого неогуковского материала, для

которого упругий потенциал имеет вид [6]

$${}^tW({}^tI_{1c}, {}^tJ) = \frac{1}{2}G({}^tI_{1c} - 3) + \frac{1}{4}\Lambda({}^tJ^2 - 1) - \left(\frac{1}{2}\Lambda + G\right) \ln {}^tJ, \quad (4)$$

где G, Λ – постоянные упругости материала; ${}^tI_{1c}$ – первый инвариант тензора меры деформаций ${}^t\mathbf{C}$.

Исходя из упругого потенциала (4), можно получить выражение для тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа

$${}^t\mathbf{S} = 2 \frac{\partial {}^tW}{\partial {}^t\mathbf{C}} = G(\mathbf{I} - {}^t\mathbf{C}^{-1}) + \frac{1}{2}\Lambda({}^tJ^2 - 1){}^t\mathbf{C}^{-1}, \quad (5)$$

где ${}^t\mathbf{C}^{-1}$ – тензор, обратный к тензору меры деформаций.

Запишем соотношения упругости (5) в осях главных деформаций в компонентной форме:

$$S_1 = G(1 - \lambda_1^{-2}) + \frac{1}{2}\Lambda(J^2 - 1)\lambda_1^{-2} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), \quad (6)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – кратности удлинений; $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$; левый верхний знак t , указывающий значение параметра нагружения, опущен.

Истинные главные напряжения выражаются через напряжения Пиолы–Кирхгофа (6)

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}S_1 = GJ^{-1}(\lambda_1^2 - 1) + \frac{1}{2}\Lambda(J - J^{-1}) \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3). \quad (7)$$

При малых деформациях соотношения упругости (7) переходят в закон Гука, постоянные упругости материала G, Λ принимают смысл постоянных Ламе. Чтобы охарактеризовать жесткость материала при объемной деформации, введем параметр $\beta = \Lambda/2G$. Отметим, что в пределах малых деформаций, подчиняющихся закону Гука, значение параметра β связано со значением коэффициента Пуассона ν соотношением $\beta = \nu/(1 - 2\nu)$.

Для иллюстрации выбранного закона связи напряжений и деформаций рассмотрим примеры простейших типов напряженного состояния.

В случае одноосного напряженного состояния, исходя из условия $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, можно получить сначала кратности удлинений в поперечных направлениях

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \frac{1}{2\beta\lambda_1^2} \left[\sqrt{1 + 4\beta(\beta + 1)\lambda_1^2} - 1 \right],$$

а затем зависимость $\sigma_1(\lambda_1)$. На рис. 2, а показаны графики этой зависимости при значениях параметра $\beta = 4,5$ (коэффициент Пуассона $\nu = 0,45$) и $\beta = 49,5$ ($\nu = 0,495$). Здесь же приведены графики изменения условного напряжения, т.е. напряжения, отнесенного к начальной площади. Напряжения выражены в долях параметра упругости G . Как и следовало ожидать, при одноосном напряженном состоянии влияние

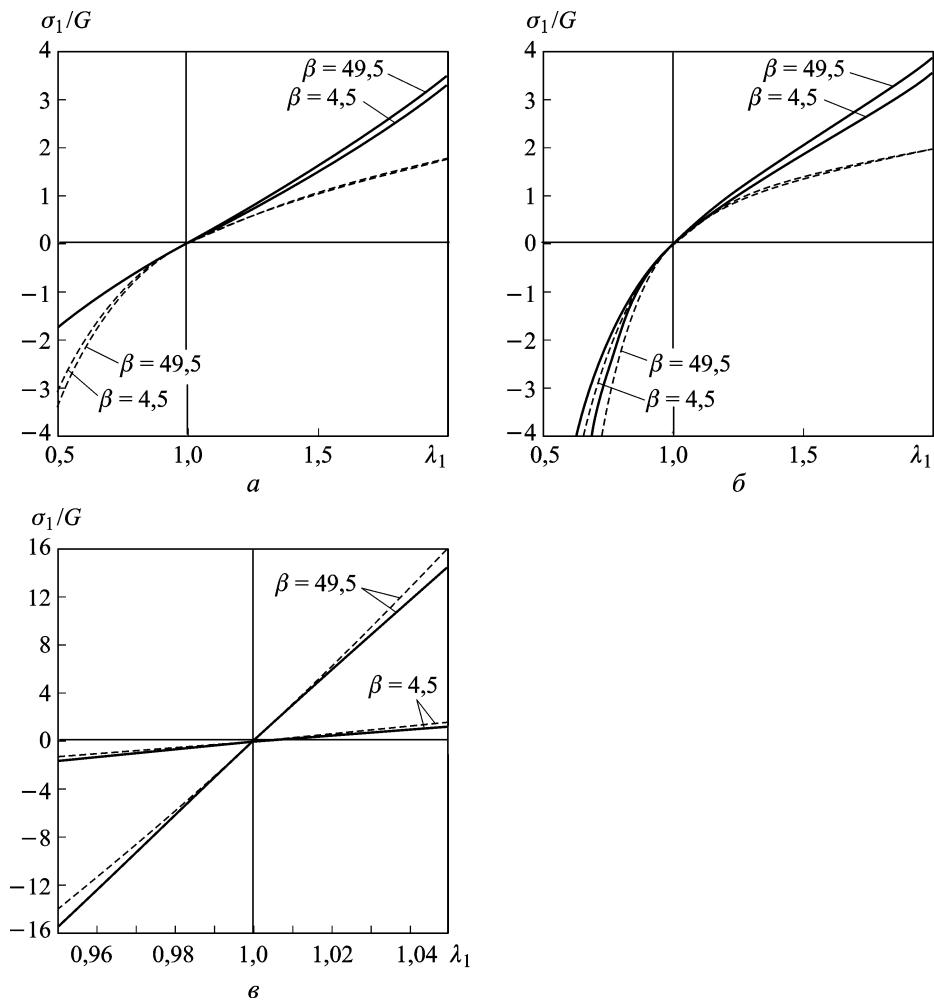


Рис. 2. Диаграммы растяжения-сжатия сжимаемого неогукковского материала:
a – одноосное состояние; *б* – равномерное двухосное состояние; *в* – равномерное трехосное состояние; сплошными линиями показаны истинные напряжения, штриховыми – условные напряжения

параметра β , т.е. сжимаемости материала, на диаграмму растяжения-сжатия не существенно.

В случае двухосного растяжения-сжатия (рис. 2, *б*) влияние сжимаемости также мало, поскольку деформация в направлении третьей оси не стеснена. Однако при трехосном напряженном состоянии ситуация меняется. Как видно из графиков на рис. 2, *в*, теперь малая объемная деформация становится значимым фактором в законе упругого поведения материала.

Вернемся к плоскому деформированному состоянию амортизатора. Для этого состояния соотношения упругости (5) в компонентной форме записываются следующим образом:

$${}^tS_{11} = G \left(1 - {}^tC_{22}/{}^tJ^2 \right) + \frac{1}{2} \Lambda \left(1 - 1/{}^tJ^2 \right) {}^tC_{22},$$

$${}^tS_{22} = G(1 - {}^tC_{11}/{}^tJ^2) + \frac{1}{2}\Lambda(1 - 1/{}^tJ^2){}^tC_{11},$$

$${}^tS_{12} = G{}^tC_{12}/{}^tJ^2 - \frac{1}{2}\Lambda(1 - 1/{}^tJ^2){}^tC_{12},$$

$${}^tS_{33} = \frac{1}{2}\Lambda({}^tJ^2 - 1).$$

Дифференцируя выражения для напряжений по компонентам тензора деформаций, найдем касательные модули упругости

$${}^tE_{1111} = (2G + \Lambda)({}^tC_{22}/{}^tJ^2)^2, \quad {}^tE_{1122} = {}^tE_{2211} = \Lambda + (2G + \Lambda)({}^tC_{12}/{}^tJ^2)^2,$$

$${}^tE_{1112} = {}^tE_{1121} = {}^tE_{1211} = {}^tE_{2111} = -(2G + \Lambda)({}^tC_{12}{}^tC_{22}/{}^tJ^4),$$

$${}^tE_{2222} = (2G + \Lambda)({}^tC_{11}/{}^tJ^2)^2,$$

$${}^tE_{2212} = {}^tE_{2221} = {}^tE_{1222} = {}^tE_{2122} = -(2G + \Lambda)({}^tC_{12}{}^tC_{11}/{}^tJ^4),$$

$${}^tE_{1212} = {}^tE_{1221} = {}^tE_{2112} = {}^tE_{2121} =$$

$$= \left(G + \frac{1}{2}\Lambda\right)({}^tC_{11}{}^tC_{22} + {}^tC_{12}^2)/{}^tJ^4 - \frac{1}{2}\Lambda,$$

из которых составим симметричную матрицу касательных модулей

$$[{}^tE] = \begin{bmatrix} {}^tE_{1111} & {}^tE_{1122} & {}^tE_{1112} \\ {}^tE_{2211} & {}^tE_{2222} & {}^tE_{2212} \\ {}^tE_{1211} & {}^tE_{1222} & {}^tE_{1212} \end{bmatrix}.$$

Переходя к матричной записи уравнений, принятой в МКЭ, представим связь приращений напряжений и деформаций в виде

$$d\{{}^tS\} = [{}^tE]d\{{}^t\varepsilon\},$$

где $\{{}^tS\} = \{ {}^tS_{11} \quad {}^tS_{22} \quad {}^tS_{12} \}$, $\{{}^t\varepsilon\} = \{ {}^t\varepsilon_{11} \quad {}^t\varepsilon_{22} \quad 2{}^t\varepsilon_{12} \}$ – векторы-столбцы.

Из линеаризованного уравнения виртуальных работ (2) в результате конечно-элементной дискретизации следуют уравнения МКЭ для шага нагружения [4]:

$$([{}^tK_L] + [{}^tK_{NL}]) \Delta\{q\} = \{{}^{t+\Delta t}P\}_{ext} - \{{}^tP\}_{int}, \quad (8)$$

где $\Delta\{q\}$ – искомый вектор приращений узловых перемещений; $[{}^tK_L]$, $[{}^tK_{NL}]$ – матрицы тангенциальной жесткости конструкции при линейных ($\Delta\varepsilon$) и нелинейных ($\Delta\eta$) деформациях соответственно; $\{{}^{t+\Delta t}P\}_{ext}$ и $\{{}^tP\}_{int}$ – векторы внешних и внутренних узловых сил.

Независимо от типа используемого конечного элемента общий вид матриц, входящих в уравнение (8), таков:

$$[{}^tK_L] = \int_{0V} [{}^tB_L]^T [{}^tE] [{}^tB_L] d^0V,$$

$$[{}^tK_{NL}] = \int_{0V} [B_{NL}]^T [{}^tS] [B_{NL}] d^0V,$$

$$\{{}^tP\}_{int} = \int_{0V} [{}^tB_L]^T \{{}^tS\} d^0V,$$

где $[{}^tB_L]$ — матрица связи линейных деформаций $\{ \Delta e_{11} \quad \Delta e_{22} \quad 2\Delta e_{12} \}$ с узловыми перемещениями $\Delta\{q\}$; $[B_{NL}]$ — матрица связи производных перемещений $\{ \Delta u_{1,1} \quad \Delta u_{1,2} \quad \Delta u_{2,1} \quad \Delta u_{2,2} \}$ с узловыми перемещениями $\Delta\{q\}$;

$$[{}^tS] = \begin{bmatrix} {}^tS_{11} & {}^tS_{12} & 0 & 0 \\ {}^tS_{12} & {}^tS_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tS_{11} & {}^tS_{12} \\ 0 & 0 & {}^tS_{12} & {}^tS_{22} \end{bmatrix}$$

— матрица начальных напряжений.

Вид матриц $[B_{NL}]$, $[{}^tS]$ может быть пояснен следующим представлением удельной работы начальных напряжений:

$$\begin{aligned} {}^tS : \delta\Delta\eta &= {}^tS_{ij} \delta\left(\frac{1}{2}\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}\right) = \\ &= \delta\{ \Delta u_{1,1} \quad \Delta u_{1,2} \quad \Delta u_{2,1} \quad \Delta u_{2,2} \}^T [{}^tS] \{ \Delta u_{1,1} \quad \Delta u_{1,2} \quad \Delta u_{2,1} \quad \Delta u_{2,2} \} = \\ &= \delta\Delta\{q\}^T [B_{NL}]^T [{}^tS] [B_{NL}] \Delta\{q\}. \end{aligned}$$

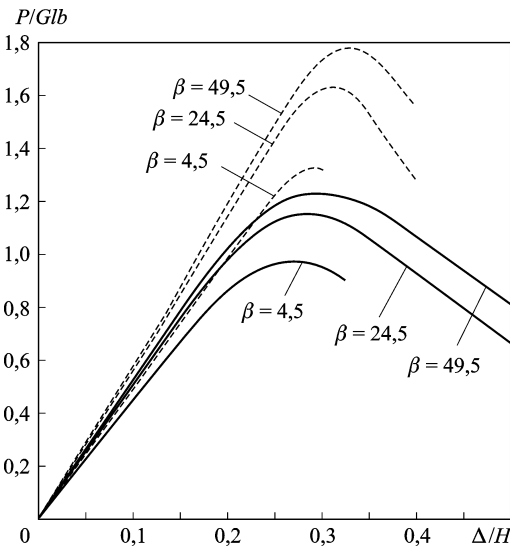


Рис. 3. Нагрузочные характеристики амортизаторов (сплошные линии соответствуют $b/H = 0, 3$; штриховые — $b/H = 0, 4$)

На каждом шаге нагружения приращения перемещений $\Delta\{q\}$ уточняются итерационно по методу Ньютона:

$$\begin{aligned} &([{}^{t+\Delta t}K_L]^{(k)} + \\ &+ [{}^{t+\Delta t}K_{NL}]^{(k)}) \tilde{\Delta}\{q\}^{(k+1)} = \\ &= \{{}^{t+\Delta t}P\}_{ext} - \{{}^{t+\Delta t}P\}_{int}^{(k)}, \\ \Delta\{q\}^{(k+1)} &= \\ &= \Delta\{q\}^{(k)} + \tilde{\Delta}\{q\}^{(k+1)}. \end{aligned}$$

В настоящей работе расчеты выполнялись с помощью изопараметрического четырехузлового конечного элемента с билинейной аппроксимацией перемещений. Далее приведены некоторые результаты расчетов.

Геометрия резинового элемента амортизатора в исходном состоянии определяется двумя параметрами: углом наклона граней элементов к горизонтальному основанию α и относительной толщиной b/H . На рис. 3 показаны нагрузочные характеристики для амортизаторов с параметрами $\alpha = 60^\circ$, $b/H = 0,3; 0,4$. Из рис. 3 следует, что учет сжимаемости материала заметно влияет на значения предельных сил. При параметрах жесткости материала $\beta = 4,5$ и $49,5$ различие между предельными силами составляет 21 и 25 % для амортизаторов с относительными толщинами $b/H = 0,3$ и $0,4$ соответственно. В рассмотренном диапазоне изменения β жесткость амортизатора на линейном участке нагрузочной характеристики изменяется на 15 % и более.

На рис. 4, *a* и *б* показаны конфигурация нагруженного амортизатора и законы распределения по толщине одного из главных истинных напряжений — напряжения, направленного вдоль деформированной

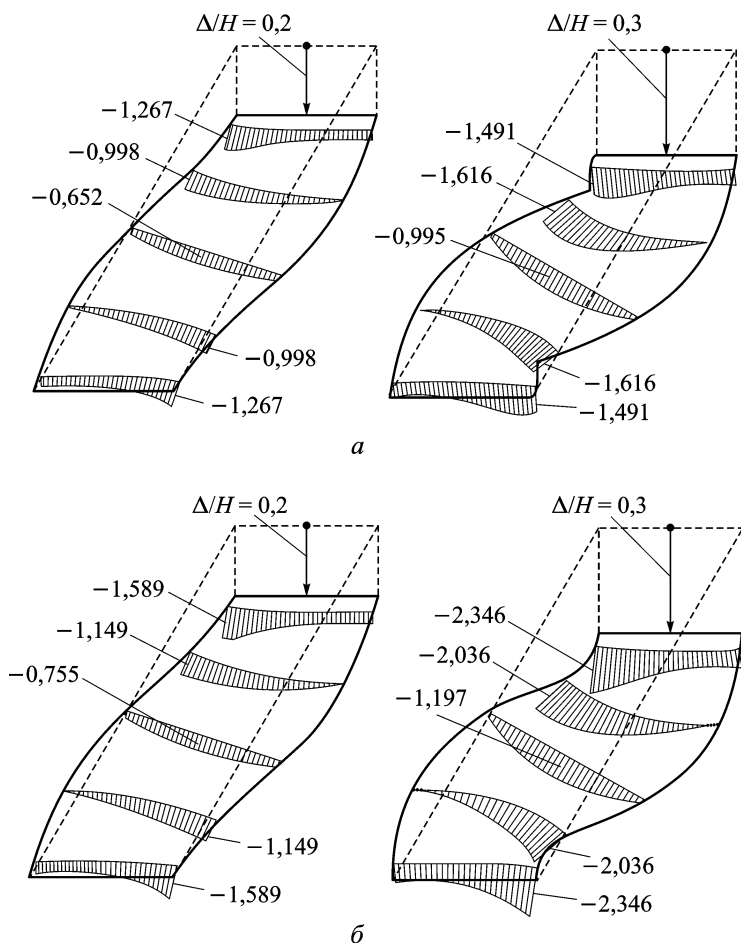


Рис. 4. Распределение напряжений в резиновом элементе амортизатора при различных значениях параметров:
a — $b/H = 0,4$; $\beta = 4,5$; *б* — $b/H = 0,4$; $\beta = 49,5$; напряжения отнесены к модулю упругости G

полосы. Из трех действующих главных напряжений это напряжение является наибольшим по абсолютной величине. Эпюры напряжений построены в координатных сечениях $^0x_2 = \text{const}$. Приведенные результаты свидетельствуют о весьма существенном влиянии сжимаемости резины на значения напряжений, что, конечно, является ожидаемым при режиме заданных смещений торцов амортизатора. В целом можно утверждать, что учет малой сжимаемости резины вносит заметные изменения в результаты расчета амортизаторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К л ю е в а Г. П. Исследование напряженного и деформированного состояния резиновых амортизаторов арочного типа // Расчеты на прочность. – 1977. – Вып. 18. – С. 59–72.
2. Б и д е р м а н В. Л., Ж и с л и н А. Я. Нелинейные характеристики резинометаллических упругих элементов // Расчеты на прочность. – 1979. – Вып. 20. – С. 107–122.
3. Т р е л о а р Л. Физика упругости каучука / Пер. с англ. под ред. Е.В. Кувшинского. – М.: ИИЛ, 1953. – 240 с.
4. В а т х е К. J. Finite element procedures. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996. – 1036 p.
5. В а с и д з у К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
6. W r i g g e r s P. Nonlinear finite element methods. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. – 559 p.
7. В о н е т J., W o o d R. D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge University Press, 1997. – 245 p.

Статья поступила в редакцию 15.12.2010

Александр Ефимович Белкин родился в 1951 г., окончил в 1974 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области численных методов расчета конструкций, механики пневматических шин.

A.Ye. Belkin (b. 1951) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1974. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications in the field of numerical methods of design of constructions, mechanics of pneumatic tires.

Виктор Владимирович Семенов родился в 1985 г., окончил в 2008 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области численных методов расчета конструкций.

V.V. Semenov (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2008. Post-graduate of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of numerical methods of design of constructions.

Владимир Константинович Семенов родился в 1987 г. Студент МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер научно-технического центра “Интайр”. Специализируется в области механики пневматических шин.

V.K. Semenov (b. 1987) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Engineer of Scientific and Technical Center “Intair”. Specializes in the field of mechanics of pneumatic tires.