

где Δ_{ni} — износ пары трения за одно включение на i -м режиме работы. Допустимый износ дисков трения определяется сопоставлением ограничений, налагаемых конструкцией фрикциона и самого диска. Для МКД, работающих всухую, он лимитируется толщиной металло-керамических накладок и способом их крепления к основе диска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жучков В. М., Филиппов А. Н., Юдин Е. Г. К расчету гидродинамических потерь мощности в дисковых фрикционных узлах // Известия вузов. Машиностроение. – 1982. – № 4. – С. 3–7.
2. Крагельский И. В. Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с.
3. Трение, изнашивание и смазка: Справочник / Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – 358 с.
4. Дроздов Ю. Н. Обобщенные характеристики для оценки износостойкости твердых тел // Трение и износ. – 1980. – Т. 1. – № 3. – С. 417–424.
5. Фанталов В. С., Жучков В. М., Юдин Е. Г. Износостойкость фрикционных элементов, работающих в масле // Известия вузов. Машиностроение. – 1982. – № 12. – С. 59–62.

Статья поступила в редакцию 24.02.04

УДК 539.3

А. Е. Белкин, Н. Л. Нарская

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ КОНТАКТА АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрены формулировка и основные этапы решения геометрически нелинейной контактной задачи обжатия шины. Для выполнения условий контакта использован метод конечных элементов с процедурой множителей Лагранжа. Деформации шины описываются теорией оболочек типа Тимошенко. Расчеты выполнены с помощью четырехугольного четырехузлового оболочечного элемента МТС₄, для которого подробно представлены определяющие соотношения и результаты тестирования. Приведен пример расчета обжатия автомобильной шины.

Исследование контакта автомобильной шины с опорной поверхностью является одной из наиболее важных задач механики шин. Численному решению этой задачи посвящены работы [1–6], в которых используются различные по степени детальности моделирования и точности подходы. В основном используются две расчетные модели: сло-

истой оболочки [1–3] и трехмерного тела [4–6]. Обе модели реализуются, как правило, методом конечных элементов (МКЭ).

Учитывая различные уровни сложности этих моделей, можно предположить, что при изучении собственно контакта шины целесообразно применение более простой оболочечной модели, поскольку в контактной задаче значимыми являются лишь жесткостные свойства шины. При этом протектор можно рассматривать как особый упругий слой. После установления параметров контактного взаимодействия для подробного изучения локальных эффектов напряженного состояния шины могут быть применены средства трехмерного моделирования.

В настоящей работе шина представлена как упругая слоистая оболочка с конечной жесткостью при поперечном сдвиге. В отличие от работ [2, 3], где контактная задача решалась с помощью алгоритма Удзавы, далее применен метод множителей Лагранжа, обеспечивающий более быструю сходимость итерационного процесса.

Формулировка и метод решения контактной задачи. Задача о контакте упругого тела (шины) с жестким основанием формулируется [7] как задача минимизации функционала полной потенциальной энергии

$$\Pi(\bar{\mathbf{u}}) = \int_V a(\bar{\mathbf{u}}) dV - \int_{\Omega_q} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\Omega \quad (1)$$

на множестве функций перемещений $\bar{\mathbf{u}}$, удовлетворяющих в области возможного контакта Ω_c кинематическому условию непроникания точек тела внутрь основания:

$$\eta_n - u_n \geq 0, \quad (2)$$

где $a(\bar{\mathbf{u}})$ — функция удельной энергии упругой деформации; V — объем тела; $\bar{\mathbf{q}}$ — внешняя нагрузка на части поверхности тела Ω_q ; η_n — начальные зазоры между деформируемым телом и основанием в направлении нормали $\bar{\mathbf{n}}$ к основанию; $u_n = \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ — нормальные составляющие векторов перемещений.

Искомое контактное давление должно удовлетворять условию неположительности

$$q_n \leq 0. \quad (3)$$

В области возможного контакта условия (2), (3) могут быть объединены:

$$\begin{cases} \eta_n - u_n \geq 0, \\ q_n \leq 0, \\ q_n (\eta_n - u_n) = 0, \end{cases} \quad \text{при } \bar{\mathbf{R}} \in \Omega_{cp};$$

здесь $\bar{\mathbf{R}}$ — радиусы-векторы точек наружной поверхности тела до деформации.

Применение процедуры МКЭ приводит к дискретным аналогам выражений (1), (2). В случае линейно-упругой системы функция полной потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi(\{\Delta\}) = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \{f\},$$

где $\{\Delta\}$ — вектор перемещений в узлах сетки конечных элементов; $[K]$ — матрица жесткости; $\{f\}$ — вектор узловых сил.

Условие непроникания (2) в i -м узле сетки конечных элементов записывается следующим образом:

$$\{c_i\}^T \{\Delta\} - \eta_{ni} \leq 0, \quad (4)$$

где $\{c_i\}$ — известный числовой вектор; η_{ni} — значение зазора для этого узла.

Для решения контактных задач наиболее часто применяют метод множителей Лагранжа и метод штрафов, позволяющие минимизировать функцию потенциальной энергии при наличии ограничений. В настоящей работе использован метод множителей Лагранжа. Для каждого ограничения (4) вводится множитель λ_i , имеющий смысл контактной силы в i -м узле, и составляется модифицированная функция потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mod}}(\{\Delta\}, \{\lambda\}) &= \Pi(\{\Delta\}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (\{c_i\}^T \{\Delta\} - \eta_{ni}) = \\ &= \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \{f\} + \{\lambda\}^T ([C]^T \{\Delta\} - \{\eta\}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{\lambda\} = \{\lambda_1 \dots \lambda_m\}$ — вектор множителей Лагранжа; $\{\eta\} = \{\eta_{n1} \dots \eta_{nm}\}$ — вектор дискретных зазоров; $[C] = [\{c_1\} \dots \{c_m\}]$ — матрица, составленная из векторов, определяющих кинематические условия (4) в узлах; m — общее число кинематических условий.

Условия стационарности этой функции по переменным $\{\Delta\}$, $\{\lambda\}$ приводят к системе уравнений

$$[K] \{\Delta\} + [C] \{\lambda\} = \{f\}, \quad [C]^T \{\Delta\} = \{\eta\}, \quad (6)$$

решая которую получают перемещения $\{\Delta\}$ и контактные силы $\{\lambda\}$. Далее проверяется условие неположительности контактных сил, и по результатам проверки пересматривается область контакта. Уравнения (6) приходится формулировать и решать многократно для различных пробных зон контакта.

При практической реализации метода для регуляризации задачи к функции Лагранжа (5) добавляют слагаемое $(1/2k) \{\lambda\}^T \{\lambda\}$ [8]. В результате второе уравнение системы (6), описывающее условия точечного контакта, заменяется следующим:

$$[C]^T \{\Delta\} + (1/k) \{\lambda\} = \{\eta\}.$$

Применительно к задаче обжатия шины, решаемой по оболочечной модели, смысл добавленного слагаемого $(1/k) \{\lambda\}$ очевиден — это деформации протектора.

В случае больших перемещений упругого тела, какие имеют место при обжатии шины, алгоритм решения контактной задачи дополняется внутренним (по отношению к поиску области контакта) итерационным процессом, направленным на выполнение нелинейных уравнений равновесия. При использовании метода Ньютона уравнения итерационного процесса имеют вид:

$$\begin{aligned} [K_t]_j d\{\Delta\}_{j+1} + [C] \{\lambda\}_{j+1} &= \{f\} - \{g\}_j; \\ [C]^T d\{\Delta\}_{j+1} + (1/k) \{\lambda\}_{j+1} &= \{\eta\} - [C]^T \{\Delta\}_j; \\ \{\Delta\}_{j+1} &= \{\Delta\}_j + d\{\Delta\}_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\{\Delta\}_j$, $d\{\Delta\}_{j+1}$ — приближенные значения перемещений и малые поправки к ним; $\{g\}_j$ — вектор внутренних сил при перемещениях $\{\Delta\}_j$; $[K_t]_j = \frac{\partial \{g\}}{\partial \{\Delta\}}$ — матрица тангенциальной жесткости при перемещениях $\{\Delta\}_j$.

Оболочечная модель шины. Для расчета автомобильной шины (рис. 1) воспользуемся простейшим вариантом нелинейной теории слоистых оболочек, в которой деформации поперечного сдвига учитываются по модели Тимошенко. Эта теория и ее уточненные варианты применялись для анализа напряженного состояния шин в работах

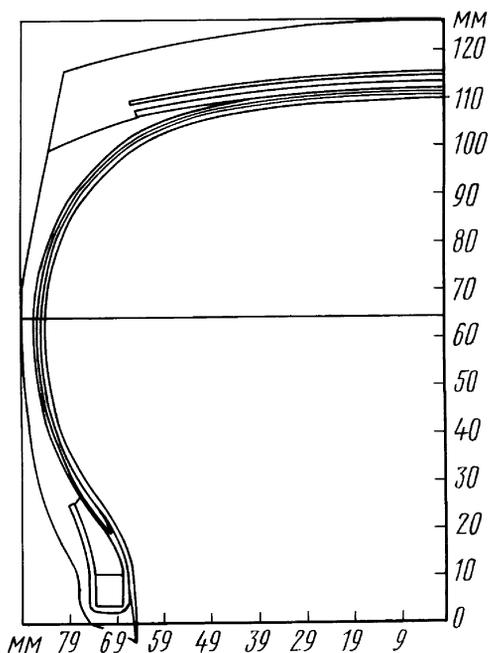


Рис. 1. Профиль легковой радиальной шины 175/70R13

Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова [9]. На основе всестороннего изучения осесимметричной задачи о надувке шин авторами сделан вывод о том, что модель оболочки с глобальной (не послойной) аппроксимацией перемещений по толщине может применяться в качестве первого приближения, предназначенного для оценки общей нагруженности материалов шины без детального анализа локальных эффектов в конструктивно сложных зонах борта и кромок брекера. В настоящей работе применение теории оболочек типа Тимошенко рассматривается именно в указанном смысле.

Примем срединную поверхность каркаса шины в качестве базовой поверхности оболочки и определим ее деформации $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \gamma_{12}\}$ соотношениями квадратичной теории:

$$\varepsilon_1 = e_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \vartheta_1^2); \quad \varepsilon_2 = e_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \vartheta_2^2); \quad \gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \vartheta_1 \vartheta_2, \quad (7)$$

где $e_1, \omega_1, \vartheta_1$ ($1 \rightarrow 2$) — параметры деформации поверхности, линейно зависящие от перемещений.

Деформации эквидистантных слоев $\{\varepsilon\}_z = \{\varepsilon_{1z} \ \varepsilon_{2z} \ \gamma_{12z}\}$ определяются добавлением деформаций изгиба и кручения:

$$\{\varepsilon\}_z = \{\varepsilon\} + z\{\kappa\}, \quad (8)$$

где $\{\kappa\} = \{\kappa_1 \ \kappa_2 \ 2\kappa_{12}\}$ — вектор, составленный из производных углов поворота β_1, β_2 материальной нормали к базовой поверхности оболочки [9]. Значения поперечных сдвигов $\{\gamma\} = \{\gamma_{13} \ \gamma_{23}\}$, осредненные по толщине оболочки, вычисляются как разности углов поворота материальной и геометрической нормалей оболочки:

$$\gamma_{13} = \beta_1 - \vartheta_1; \quad \gamma_{23} = \beta_2 - \vartheta_2. \quad (9)$$

Деформационным соотношениям (7)–(9) соответствуют нелинейные уравнения равновесия, которые после приведения напряжений к базовой поверхности и аппроксимации перемещений с использованием узловых переменных $\{\Delta\}$ получают следующий вид:

$$\int_{\Omega} ([B_\varepsilon^{NL}]^T \{T\} + [B_\kappa]^T \{M\} + [B_\gamma]^T \{Q\}) d\Omega = \{f\}, \quad (10)$$

где $\{T\}, \{Q\}$ — векторы мембранных и поперечных сил; $\{M\}$ — вектор моментов в оболочке; $[B_\varepsilon^{NL}], [B_\gamma], [B_\kappa]$ — матрицы связи вариаций деформаций оболочки с возможными узловыми перемещениями, т.е. матрицы из соотношений

$$\delta\{\varepsilon\} = [B_\varepsilon^{NL}]\delta\{\Delta\}; \quad \delta\{\kappa\} = [B_\kappa]\delta\{\Delta\}; \quad \delta\{\gamma\} = [B_\gamma]\delta\{\Delta\}. \quad (11)$$

В написании матрицы мембранных деформаций $[B_\varepsilon^{NL}]$ верхние значки напоминают о нелинейном характере зависимости этих деформаций от перемещений.

При формулировке связи между внутренними силами $\{T\}$, $\{M\}$, $\{Q\}$ и деформациями $\{\varepsilon\}$, $\{\kappa\}$, $\{\gamma\}$ предполагаем, что и резина, и резинокордные слои проявляют свойства линейной упругости в пределах деформаций, наблюдаемых при нормальных условиях эксплуатации шин. В этом случае физические соотношения для оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \{T\} &= [D_\varepsilon]\{\varepsilon\} + [D_{\varepsilon\kappa}]\{\kappa\}; \\ \{M\} &= [D_{\varepsilon\kappa}]\{\varepsilon\} + [D_\kappa]\{\kappa\}; \\ \{Q\} &= [D_\gamma]\{\gamma\}; \end{aligned} \quad (12)$$

где $[D_\varepsilon] = \int_h [E] dz$; $[D_{\varepsilon\kappa}] = \int_h z[E] dz$; $[D_\kappa] = \int_h z^2[E] dz$;
 $[D_\gamma] = \int_h [G] dz$; $[E]$, $[G]$ — матрицы модулей упругости резины и резинокордных слоев при плоском напряженном состоянии и поперечных сдвигах.

Уравнения (7)–(12) составляют принципиальную основу рассматриваемой оболочечной модели.

Получим выражение для матрицы тангенциальной жесткости оболочки. Для этого найдем приращение вектора внутренних сил $\{g\}$ (т.е. левой части уравнений равновесия (10)), соответствующее малому приращению вектора узловых перемещений:

$$\begin{aligned} d\{g\} &= \int_\Omega \left(d[B_\varepsilon^{NL}]^T \{T\} + [B_\varepsilon^{NL}]^T d\{T\} + \right. \\ &\quad \left. + [B_\kappa]^T d\{M\} + [B_\gamma]^T d\{Q\} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом соотношений упругости (12) и формул для деформаций (11) выражение (13) приводится к виду

$$d\{g\} = ([K_\varepsilon] + [K_{\varepsilon\kappa}] + [K_\kappa] + [K_\gamma]) d\{\Delta\} + \int_\Omega d[B_\varepsilon^{NL}]^T \{T\} d\Omega, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} [K_\varepsilon] &= \int_\Omega [B_\varepsilon^{NL}]^T [D_\varepsilon] [B_\varepsilon^{NL}] d\Omega; \\ [K_{\varepsilon\kappa}] &= \int_\Omega \left([B_\varepsilon^{NL}]^T [D_{\varepsilon\kappa}] [B_\kappa] + [B_\kappa]^T [D_{\varepsilon\kappa}] [B_\varepsilon^{NL}] \right) d\Omega; \end{aligned}$$

$$[K_{\kappa}] = \int_{\Omega} [B_{\kappa}]^T [D_{\kappa}] [B_{\kappa}] d\Omega;$$

$$[K_{\gamma}] = \int_{\Omega} [B_{\gamma}]^T [D_{\gamma}] [B_{\gamma}] d\Omega$$

— матрицы мембранной, мембранно-изгибной, изгибной и сдвиговой жесткостей оболочки соответственно.

Исходя из нелинейных формул (7) определения деформаций базовой поверхности, устанавливаем вид матрицы $[B_{\varepsilon}^{NL}]$:

$$[B_{\varepsilon}^{NL}] = [B_e] + [\Theta][B_{\vartheta}],$$

где $[B_e]$ — матрица, определяющая линейную по перемещениям часть мембранных деформаций; $[B_{\vartheta}]$ — матрица связи вектора углов поворота $\{\vartheta\} = \{ \omega_1 \quad \vartheta_1 \quad \omega_2 \quad \vartheta_2 \}$ элементов базовой поверхности с век-

тором узловых перемещений; $[\Theta] = \begin{bmatrix} \omega_1 & \vartheta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \vartheta_2 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 & \vartheta_1 \end{bmatrix}$ — матрица углов поворота.

Теперь последнее слагаемое выражения (14) может быть преобразовано следующим образом:

$$\int_{\Omega} d[B_{\varepsilon}^{NL}]^T \{T\} d\Omega = \int_{\Omega} [B_{\vartheta}]^T d[\Theta]^T \{T\} d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} [B_{\vartheta}]^T [T] d\{\vartheta\} d\Omega = \left(\int_{\Omega} [B_{\vartheta}]^T [T] [B_{\vartheta}] d\Omega \right) d\{\Delta\},$$

где $[T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & S \\ 0 & 0 & T_2 & 0 \\ 0 & S & 0 & T_2 \end{bmatrix}$ — матрица мембранных усилий.

Таким образом, получаем окончательные выражения для приращения вектора внутренних сил

$$d\{g\} = ([K_{\varepsilon}] + [K_{\varepsilon\kappa}] + [K_{\kappa}] + [K_{\gamma}] + [K_{\sigma}]) d\{\Delta\}$$

и матрицы тангенциальной жесткости оболочки

$$[K_t] = [K_{\varepsilon}] + [K_{\varepsilon\kappa}] + [K_{\kappa}] + [K_{\gamma}] + [K_{\sigma}],$$

где $[K_{\sigma}] = \int_{\Omega} [B_{\vartheta}]^T [T] [B_{\vartheta}] d\Omega$ — так называемая матрица начальных напряжений.

Оболочечный конечный элемент МТС₄. Известно [10], что при расчете оболочек с учетом поперечных сдвигов МКЭ в форме метода перемещений может наблюдаться значительное завышение жесткости конечно-элементной модели, называемое “сдвиговым заклиниванием”. Многим оболочечным элементам присущ этот дефект, ограничивающий их применимость. В настоящей работе для расчетов использован элемент МТС₄ (Mixed Interpolation of Tensorial Components) [11], у которого ситуация “заклинивания” устранена благодаря специальной процедуре аппроксимации поперечных сдвигов.

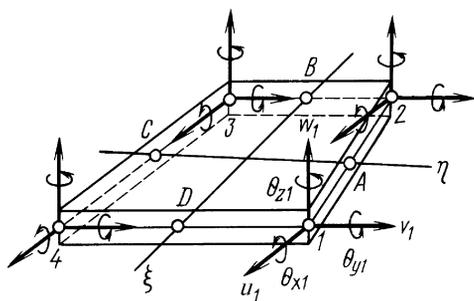


Рис. 2. Плоский четырехугольный оболочечный элемент с 24 степенями свободы

МТС₄ — это четырехугольный четырехузловой элемент с билинейной аппроксимацией текущих координат и перемещений. Элемент может быть как плоским, так и закрученным, если четвертый узел выходит из плоскости первых трех узлов. Однако для расчета шины, вся базовая поверхность которой может быть разделена на конечные элементы линиями кривизны, достаточно использовать плоские элементы. Ограничимся описанием этого варианта.

Введем локальную декартову систему координат: оси x, y расположим в базовой плоскости элемента, а ось z направим по нормали к этой плоскости. В каждом из четырех узлов элемента определяются шесть степеней свободы: три линейных перемещения u_i, v_i, w_i по направлениям осей x, y, z и три угла поворота $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ относительно тех же осей (рис. 2). Общее число степеней свободы элемента равно 24.

Заметим, что углы θ_x, θ_y представляют собой использованные в модели оболочки повороты материальной нормали: $\theta_x = -\beta_2, \theta_y = \beta_1$.

На элементе проводится билинейная аппроксимация текущих координат

$$\{x \ y\} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \{x_i \ y_i\} \quad (15)$$

и перемещений

$$\{u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y\} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \{u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}\}, \quad (16)$$

где $N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$ ($i = \overline{1, 4}$) — функции формы; ξ, η — локальные нормированные координаты, изменяющиеся в пределах от -1 до $+1$; $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1$ — координаты узлов элемента.

Построение матриц жесткости $[K_\varepsilon]$, $[K_{\varepsilon\kappa}]$, $[K_\kappa]$, $[K_\sigma]$ осуществляется обычным для изопараметрических элементов образом.

При формировании матрицы сдвиговой жесткости $[K_\gamma]$ поступают так. Деформации поперечного сдвига γ_{13} , γ_{23} (для плоского конечного элемента эти деформации далее обозначаются γ_{xz} , γ_{yz}) включаются в расчет с помощью аппроксимации, независимой от аппроксимации деформаций изгиба κ_1 , κ_2 , $2\kappa_{12}$. Сначала через узловые перемещения выражаются углы сдвига в плоскостях границ элемента в срединных точках A, B, C, D (см. рис. 2):

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi z}^A &= \frac{w_1 - w_2}{s_{12}} - \frac{1}{2} (\theta_{x1} + \theta_{x2}) \left(\frac{y_1 - y_2}{s_{12}} \right) + \frac{1}{2} (\theta_{y1} + \theta_{y2}) \left(\frac{x_1 - x_2}{s_{12}} \right); \\ \gamma_{\xi z}^C &= \frac{w_4 - w_3}{s_{43}} - \frac{1}{2} (\theta_{x4} + \theta_{x3}) \left(\frac{y_4 - y_3}{s_{43}} \right) + \frac{1}{2} (\theta_{y4} + \theta_{y3}) \left(\frac{x_4 - x_3}{s_{43}} \right); \\ \gamma_{\eta z}^D &= \frac{w_1 - w_4}{s_{14}} - \frac{1}{2} (\theta_{x1} + \theta_{x4}) \left(\frac{y_1 - y_4}{s_{14}} \right) + \frac{1}{2} (\theta_{y1} + \theta_{y4}) \left(\frac{x_1 - x_4}{s_{14}} \right); \\ \gamma_{\eta z}^B &= \frac{w_2 - w_3}{s_{23}} - \frac{1}{2} (\theta_{x2} + \theta_{x3}) \left(\frac{y_2 - y_3}{s_{23}} \right) + \frac{1}{2} (\theta_{y2} + \theta_{y3}) \left(\frac{x_2 - x_3}{s_{23}} \right),\end{aligned}\tag{17}$$

где s_{ij} — длины сторон элемента.

Затем, основываясь на значениях сдвигов в указанных четырех точках, проводится аппроксимация законов изменения сдвигов внутри элемента:

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi z} &= \left(\frac{s_{12}\gamma_{\xi z}^A}{s_\xi} \right) \frac{1 + \eta}{2} + \left(\frac{s_{43}\gamma_{\xi z}^C}{s_\xi} \right) \frac{1 - \eta}{2}; \\ \gamma_{\eta z} &= \left(\frac{s_{14}\gamma_{\eta z}^D}{s_\eta} \right) \frac{1 + \xi}{2} + \left(\frac{s_{23}\gamma_{\eta z}^B}{s_\eta} \right) \frac{1 - \xi}{2},\end{aligned}\tag{18}$$

где s_ξ , s_η — длины соответственно ξ -, η -линий, являющиеся переменными в произвольном четырехугольнике.

Аппроксимация (18) позволяет описать состояние чистого изгиба элемента, что не удастся получить непосредственно из полей перемещений (16). Для реализации чистого изгиба достаточно, чтобы в ноль обращались поперечные сдвиги $\gamma_{\xi z}^A$, $\gamma_{\xi z}^C$, $\gamma_{\eta z}^D$, $\gamma_{\eta z}^B$. При этом деформации изгиба

$$\kappa_1 = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \quad 2\kappa_{12} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

могут принимать произвольные значения. Полученная возможность предсказывать нулевые или малые значения деформаций сдвига, не

ограничивая другие деформации, предотвращает эффект “сдвигового заклинивания”.

Итак, формулами (17), (18) определены сдвиги в координатных плоскостях $\eta = \text{const}$, $\xi = \text{const}$. Теперь необходимо перейти к углам сдвига γ_{xz} , γ_{yz} . Для этого используем формулы преобразования деформаций при повороте осей:

$$\gamma_{\xi z} = \gamma_{xz} \cos \alpha + \gamma_{yz} \sin \alpha; \quad \gamma_{\eta z} = \gamma_{xz} \cos \psi + \gamma_{yz} \sin \psi, \quad (19)$$

где α , ψ — углы между осями x , ξ и x , η соответственно.

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= (\gamma_{\xi z} \sin \psi - \gamma_{\eta z} \sin \alpha) / \sin(\psi - \alpha); \\ \gamma_{yz} &= (-\gamma_{\xi z} \cos \psi + \gamma_{\eta z} \cos \alpha) / \sin(\psi - \alpha). \end{aligned} \quad (20)$$

Направляющие косинусы осей ξ и η выражаются через элементы матрицы Якоби преобразования координат (15)

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= A_{\xi}^{-1} \frac{\partial x}{\partial \xi}; & \sin \alpha &= A_{\xi}^{-1} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \\ \cos \psi &= A_{\eta}^{-1} \frac{\partial x}{\partial \eta}; & \sin \psi &= A_{\eta}^{-1} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

где $A_{\xi} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$, $A_{\eta} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$ — масштабы длины ξ - и η -линий.

Учитывая значения направляющих косинусов, представим формулы прямого и обратного преобразования деформаций (19), (20) в виде

$$\begin{aligned} \{A_{\xi} \gamma_{\xi z} \quad A_{\eta} \gamma_{\eta z}\} &= [J] \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}; \\ \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\} &= [J]^{-1} \{A_{\xi} \gamma_{\xi z} \quad A_{\eta} \gamma_{\eta z}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Чтобы получить окончательную аппроксимацию поперечных сдвигов γ_{xz} , γ_{yz} , заменим в соотношении (21) сначала деформации $\gamma_{\xi z}$, $\gamma_{\eta z}$ выражениями (18), а затем деформации в срединных точках A , B , C , D их значениями по формулам (17). Учтем также, что при билинейной

аппроксимации координат (15) длины ξ -, η -линий связаны с масштабами длин отношениями $s_\xi = 2A_\xi$, $s_\eta = 2A_\eta$. В результате названных действий получим

$$\{ \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \} = [J]^{-1} [N_\gamma] [B_\gamma^*] \{ \Delta_\gamma \}^{(e)},$$

где

$$\{ \Delta_\gamma \}^{(e)} = \{ w_1 | \theta_{x1} | \theta_{y1} | w_2 | \theta_{x2} | \theta_{y2} | w_3 | \theta_{x3} | \theta_{y3} | w_4 | \theta_{x4} | \theta_{y4} \}$$

— подвектор узловых перемещений элемента, связанных с изгибом;

$$[B_\gamma^*] = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 2 & y_{21} & x_{12} & -2 & y_{21} & x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & y_{34} & x_{43} & 2 & y_{34} & x_{43} \\ \hline 2 & y_{41} & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & y_{41} & x_{14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & y_{32} & x_{23} & -2 & y_{32} & x_{23} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

— матрица связи вектора поперечных сдвигов

$$\{ s_{12} \gamma_{\xi z}^A \quad s_{43} \gamma_{\xi z}^C \quad s_{14} \gamma_{\eta z}^D \quad s_{23} \gamma_{\eta z}^B \}$$

с узловыми перемещениями $\{ \Delta_\gamma \}^{(e)}$;

$$[N_\gamma] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 + \eta & 1 - \eta & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 + \xi & 1 - \xi \end{array} \right]$$

— матрица функций формы для поперечных сдвигов.

Таким образом, для элемента сформирована матрица поперечных сдвигов

$$[B_\gamma] = [J]^{-1} [N_\gamma] [B_\gamma^*].$$

Дальнейший ход формирования матрицы сдвиговой жесткости соответствует традиционной технологии МКЭ.

Пример расчета. В качестве примера рассмотрим результаты расчета легкой радиальной шины 175/70R13, профиль которой показан на рис. 1. Основные параметры конструкции шины таковы: наружный диаметр 582 мм, диаметр посадки на обод 329 мм, ширина профиля по пресс-форме 178 мм, каркас однослойный, жесткость корда в каркасе 290 Н/нить, частота укладки корда 1320 нитей/м, бреккер двухслойный, жесткость корда в бреккере 39000 Н/нить, частота укладки корда 640 нитей/м.

Для оценки точности решений, получаемых с помощью элемента МПТС₄, проводились тестовые расчеты при осесимметричном нагружении шины внутренним давлением. Решение МКЭ сравнивалось с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений

этой одномерной задачи, которые в рассматриваемом случае служили эталоном.

Расчет МКЭ выполнялся для симметричной четверти шины, базовая поверхность которой покрывалась сеткой 47×37 узлов.

На рис. 3 показаны графики изменения вдоль профиля шины деформаций поперечного сдвига (*a*), а также изменения меридиональных (*б*) и окружных (*в*) деформаций в точках наружной поверхности корпуса шины при внутреннем давлении 0,2 МПа. Сложный характер распределения деформаций по профилю объясняется тем, что коэффициенты упругости оболочки $[D_\varepsilon]$, $[D_{\varepsilon\kappa}]$, $[D_\kappa]$ имеют сильно различающиеся значения в трех зонах: в зоне борта, боковой стенки и брекера. На границах этих зон коэффициенты упругости меняются разрывно, что приводит к скачкообразному изменению меридиональных деформаций и резкому изменению других компонент.

Из графиков видно, что результаты расчета МКЭ и численного интегрирования уравнений согласуются качественно и весьма близки по числовым значениям. Таким образом, элемент МІТС₄ обеспечивает приемлемую точность расчета оболочек по модели Тимошенко.

Перейдем к результатам решения контактной задачи. На рис. 4 показано распределение контактного давления по ширине беговой дорожки при нагрузке на шину 3500 Н. Показанное давление является условным, поскольку получено как отношение узловых сил $\{\lambda\}$ к брутто

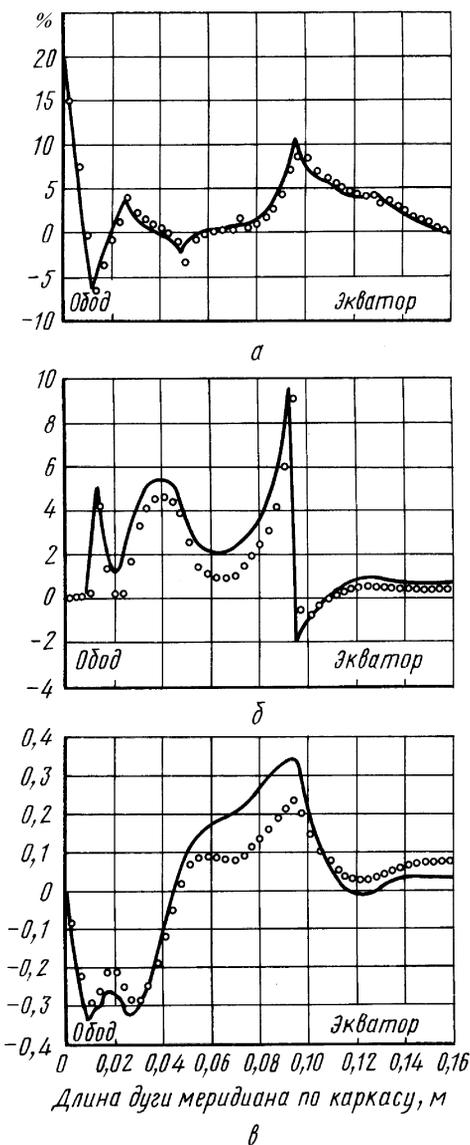


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета МКЭ и численного интегрирования уравнений для осесимметричной задачи надувки шины:

сплошные линии — результаты интегрирования; точки — результаты расчета МКЭ

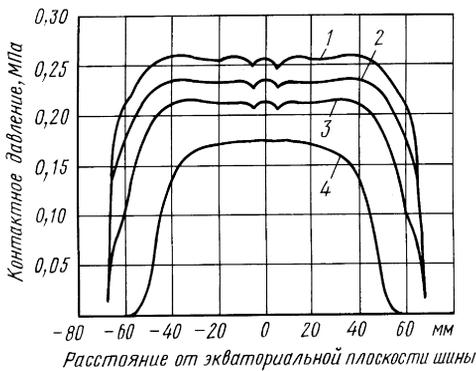


Рис. 4. Распределение контактного давления по ширине беговой дорожки: 1 — в центральном сечении пятна контакта; 2, 3, 4 — в меридиональных сечениях, повернутых по отношению к центральному на углы 5°; 10°; 15° соответственно

площади контакта, т.е. без учета расчлененности протектора. Реальное же давление на выступы протектора несколько выше условного, его можно определить, разделив условное давление на коэффициент насыщенности рисунка протектора.

По результатам расчета обжатия определяются характеристики циклов изменения напряжений и деформаций в шине при обороте колеса. В качестве примера на рис. 5 представлено распределение деформаций корда и резины в каркасе вдоль меридионального сечения шины, проходящего через центр площадки контакта. Здесь же показаны деформации, возникающие при надувке. Разность значений деформаций при надувке и обжатии представляет размах их изменения за оборот.

В рассмотренном примере в процедуре определения узлов контакта и значений контактных сил сходимость наблюдалась на 6-й итерации метода множителей Лагранжа, при этом число внутренних итераций метода Ньютона равнялось 8. По сравнению с решением этой же задачи методом Удзавы время счета сократилось многократно.

Таким образом, апробированы алгоритм и оболочечный конечный элемент МПС₄, дающие надежные результаты в нелинейной контактной задаче обжатия автомобильной шины.

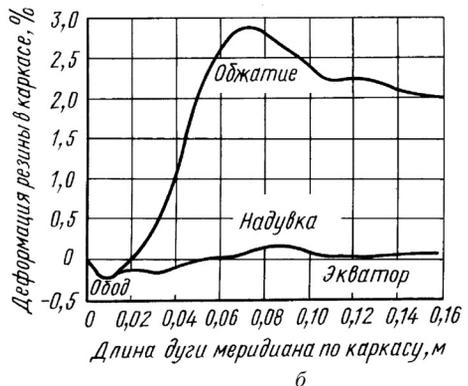
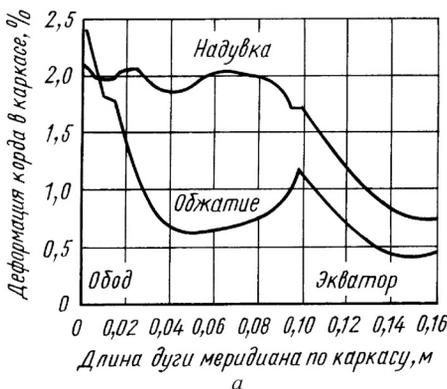


Рис. 5. Деформация корда в каркасе (а) и каркасной резины (б) в направлении, поперечном корду

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаев И. К. Математическая модель диагональной шины и ее численная реализация // Механика пневматических шин. – М.: НИИШП, 1976. – С. 5–36.
2. Чернецов А. А. Решение контактной задачи для пневматической шины с использованием геометрически нелинейной теории оболочек. Дисс... канд. техн. наук. – М.: МГАДИ, 1993. – 138 с.
3. Белкин А. Е. Разработка системы моделей и методов расчета напряженно-деформированного и теплового состояний автомобильных радиальных шин. Дисс... д-ра техн. наук. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 284 с.
4. Rothert H., Idelberger H., Jacobi W., Laging G. On the finite element solution of the three-dimensional tire contact problem // Nuclear Engineering and Design (North-Holland), 1984. – Vol. 78. – PP. 363–375.
5. Faria L. O., Oden J. T., Yavari B., Tworzydlo W. W., Bass J. M., Becker E. B. Tire modeling by finite elements // Tire Science and Technology, 1992. – Vol. 20. – № 1. – PP. 33–56.
6. Шешенин С. В., Маргарян С. А. Численное моделирование контактного взаимодействия шины с дорогой // 11-й симпозиум “Проблемы шин и резинотехнических композитов”. – М.: НИИШП, 2000. – Т. 2. – С. 211–217.
7. Кравчук А. С. Вариационный метод исследования контактного взаимодействия и его реализация на ЭВМ // Расчеты на прочность. Вып. 25. – М.: Машиностроение, 1984. – С. 33–50.
8. Simo J. C., Wriggers P., Taylor R. L. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1985. – Vol. 50. – PP. 163–180.
9. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
10. Голованов А. И., Корнишин М. С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. – Казань, Казанский физ.-техн. ин-т, 1989. – 269 с.
11. Bathe K. J., Dvorkin E. N. A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components // International journal for numerical methods in engineering. 1986. – Vol. 22. – PP. 697–722.

Статья поступила в редакцию 12.01.04

Александр Ефимович Белкин родился в 1951 г., окончил в 1974 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области расчетов на прочность, механики пневматических шин.

A.Ye. Belkin (b. 1951) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1974. D. Sc. (Eng.), professor of "Applied Mechanics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of structural analysis, mechanics of pneumatic tires.

