

ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ ШАРОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И МАТРИЦЫ

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

e-mail: zarubin@bmstu.ru, gnk1914@mail.ru, inga_fn2@mail.ru

Построена математическая модель переноса тепловой энергии в композите с включениями шаровой формы (в общем случае в виде полых шаров). Учтена возможность возникновения неидеального теплового контакта между включениями и матрицей. Получены оценки эффективного коэффициента теплопроводности такого композита, в том числе с применением двойственной формулировки вариационной задачи стационарной теплопроводности в неоднородном твердом теле. Проведенный параметрический анализ позволил установить области применения найденных оценок, которые могут быть использованы для прогноза эффективного коэффициента теплопроводности композитов, в частности, модифицированных наноструктурными элементами.

Ключевые слова: композит с включениями шаровой формы, эффективный коэффициент теплопроводности, наноструктурные элементы.

EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF THE COMPOSITE WITH NON-IDEAL CONTACT BETWEEN SPHERICAL INCLUSIONS AND THE MATRIX

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savelieva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

e-mail: zarubin@bmstu.ru, gnk1914@mail.ru, inga_fn2@mail.ru

A mathematical model of thermal energy transfer in the composite with inclusions of spherical shape (generally, in the form of hollow balls) is constructed. The possibility of the non-ideal contact between the inclusions and the matrix is taken into consideration. The estimates of the effective thermal conductivity coefficient of this composite are obtained including evaluations with application of dual formulation of the variational problem regarding the stationary heat conduction in an inhomogeneous solid. The parametric analysis is performed which makes it possible to find the range of application of the obtained estimates that can be used for predicting an effective thermal conductivity coefficient of composites, in particular those modified with nanostructured components.

Keywords: composite with spherical inclusions, effective thermal conductivity coefficient, nanostructured components.

Перспектива модификации композитов наноструктурными элементами (в том числе фуллеренами), имеющими высокие механические характеристики, связана с повышением макроскопических характеристик композитов в целом как конструкционных материалов. Для конструкций, испытывающих одновременно как механические, так и тепловые воздействия, помимо информации о механических характеристиках композита важно располагать данными и о его теплофизических свойствах (в частности, о коэффициенте теплопроводности). Эффективное значение коэффициента теплопроводности композита,

модифицированного наноструктурными элементами, зависит от их объемной концентрации C_V , от соотношения между коэффициентами теплопроводности матрицы и применяемых при модификации элементов, а также от условий теплового контакта между этими элементами и матрицей. В данной работе ограничимся рассмотрением композита, модифицированного элементами в виде полого шара, который можно считать приемлемым приближением к геометрической форме фуллерена [1].

Математическую модель переноса тепловой энергии в композите построим в предположении, что шаровые включения в общем случае не контактируют между собой, т.е. отделены друг от друга слоем материала матрицы. Композит считаем состоящим из множества составных шаровых частиц, каждая из которых включает полый шар с наружным радиусом R_1 , окруженный слоем материала матрицы. Примем, что такая составная частица с наружным радиусом R_2 является представительным элементом структуры композита и в тепловом отношении взаимодействует с неограниченным массивом однородного материала, коэффициент теплопроводности λ которого подлежит определению как эффективная характеристика композита. Таким образом, модель композита содержит три фазы: включение, слой матрицы и неограниченный массив однородного материала. При этом отношение R_1^3/R_2^3 равно объемной концентрации C_V включений в композите. Такая модель формально применима во всем промежутке $C_V \in [0, 1]$, но ее использование корректно до таких значений $C_V < 1$, при которых влияние теплового взаимодействия между соседними включениями можно считать малосущественным.

Рассмотрим тепловое взаимодействие отдельно взятой составной частицы и окружающего ее однородного материала, полагая коэффициенты теплопроводности λ_1 и λ_2 материалов соответственно полого шара и матрицы заданными. Термическое сопротивление между включением и матрицей, характеризующее неидеальный тепловой контакт на разделяющей их поверхности радиусом R_1 , является величиной, обратной коэффициенту α контактного теплообмена. При $\alpha \rightarrow \infty$ тепловой контакт на этой поверхности становится идеальным. Тепловой контакт на сферической поверхности радиусом R_2 , отделяющей составную частицу от массива однородного материала, примем идеальным.

Центр полого шара с внутренним радиусом R_0 и наружным радиусом $R_1 < R_2$ поместим в начале сферической системы координат. Примем, что на большом расстоянии r от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси сферической системы координат, от которой происходит отсчет угловой координаты θ , т.е. при $r \rightarrow \infty$ установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция $T_\infty(r, \theta) = Gr \cos \theta$, где G — модуль вектора градиента. Эта функция

удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферических координатах имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

В данном случае благодаря параллельности заданного вектора градиента температурного поля и оси отсчета угловой координаты θ распределение температуры симметрично относительно этой оси и не зависит от угловой координаты φ , т.е. $\partial^2 T / \partial \varphi^2 \equiv 0$.

По мере приближения к составной шаровой частице температурное поле в однородном материале претерпевает возмущение, описываемое также удовлетворяющим уравнению (1) дополнительным слагаемым $\Delta T(r, \theta) = (B/r^2) \cos \theta$, где B — подлежащий определению постоянный коэффициент. Таким образом, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (1), описывает функция

$$T(r, \theta) = T_\infty(r, \theta) + \Delta T(r, \theta) = (Gr + B/r^2) \cos \theta. \quad (2)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в шаровом включении

$$T_1(r, \theta) = (A_1 r + B_1/r^2) \cos \theta \quad (3)$$

и в слое материала матрицы

$$T_2(r, \theta) = (A_2 r + B_2/r^2) \cos \theta. \quad (4)$$

В равенства (2)–(4) входят 5 неизвестных коэффициентов B , A_1 , B_1 , A_2 и B_2 , которые необходимо найти из граничных условий на сферических поверхностях с радиусами R_0 , R_1 и R_2 . При $r = R_0$ из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом равенства (3) получим

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_0} = (A_1 - 2B_1/R_0^3) \cos \theta = 0$$

или

$$A_1 = 2B_1/R_0^3. \quad (5)$$

При $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока следует

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_1} = \alpha (T_2(R_1, \theta) - T_1(R_1, \theta)) = \lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial r} \right|_{r=R_1}.$$

Отсюда с использованием равенств (3) и (4) находим

$$A_2 - 2B_2/R_1^3 = \beta (A_2 - A_1 + (B_2 - B_1)/R_1^3) = \bar{\lambda} (A_1 - 2B_1/R_1^3), \quad (6)$$

где $\beta = \alpha R_1 / \lambda_2$ и $\bar{\lambda} = \lambda_1 / \lambda_2$. Наконец, при $r = R_2$ условия идеального теплового контакта, соответствующие непрерывности не только плотности теплового потока, но и распределения температуры, позволяют записать

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial r} \right|_{r=R_2}, \quad T(R_2, \theta) = T_2(R_2, \theta).$$

После подстановки в эти равенства соотношений (2) и (3) получим

$$\tilde{\lambda}(G - 2B/R_2^3) = A_2 - 2B_2/R_2^3 \quad \text{и} \quad G + B/R_2^3 = A_2 + B_2/R_2^3, \quad (7)$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_2$.

Последовательным исключением неизвестных из равенств (5)–(7) находим

$$\frac{2B}{R_2^3} = G \frac{\tilde{\lambda}(2C_1 + C_2C_V) - 2(C_1 - C_2C_V)}{\tilde{\lambda}(2C_1 + C_2C_V) + C_1 - C_2C_V}, \quad (8)$$

где

$$C_1 = \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3), \quad C_2 = 2\bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(2 + \bar{R}_0^3)$$

и $\bar{R}_0 = R_0/R_1$ ($\bar{R}_0 = 0$ в случае включения в виде сплошного шара).

Замена составной шаровой частицы равновеликим шаром с радиусом R_2 и искомым коэффициентом теплопроводности λ приведет к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем ее однородном материале с тем же значением λ . Тогда в равенстве (2) следует положить $\Delta T(r, \theta) = 0$, что равносильно условию $B = 0$, которое с учетом формулы (8) позволяет записать

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(C_1 - C_2C_V)}{2C_1 + C_2C_V}. \quad (9)$$

В частном случае идеального теплового контакта на сферической поверхности радиусом R_1 , разделяющей включение и матрицу, $\beta \rightarrow \infty$ и равенство (9) при $\bar{R}_0 = 0$ переходит в известную формулу Максвелла [2]

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + \bar{\lambda} - 2(1 - \bar{\lambda})C_V}{2 + \bar{\lambda} + (1 - \bar{\lambda})C_V}, \quad (10)$$

полученную на основе более простой двухфазной модели, состоящей из включения в виде сплошного шара и окружающего его материала матрицы. При полном отсутствии теплового контакта на этой поверхности $\beta = 0$ и из равенства (9) следует

$$\tilde{\lambda} = \frac{2(1 - C_V)}{2 + C_V} = 1 - \frac{3C_V}{2 + C_V}, \quad (11)$$

что соответствует пористому материалу с коэффициентом теплопроводности λ_2 , объемная концентрация пор в котором равна C_V . Равенство (9) переходит в соотношение (11) и в случае абсолютно нетеплопроводных включений ($\bar{\lambda} = 0$). Наоборот, при абсолютно теплопроводных включениях ($\bar{\lambda} \rightarrow \infty$) из равенства (9) получим формулу

$$\tilde{\lambda} = \frac{2 + \beta - 2(1 - \beta)C_V}{2 + \beta + (1 - \beta)C_V}, \quad (12)$$

аналогичную формуле (10) Максвелла, но с заменой параметра $\bar{\lambda}$ на параметр β . Наконец, предельным переходом в правой части формулы (12) при $\beta \rightarrow \infty$, что соответствует идеальному тепловому контакту

между матрицей и идеально теплопроводным включением, приходим к соотношению

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + 2C_V}{1 - C_V} = 1 + \frac{3C_V}{1 - C_V}.$$

Проведенный анализ частных случаев, описываемых формулой (9), может служить косвенным подтверждением корректности использованной выше процедуры получения этой формулы.

Используем двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности [3, 4] для получения двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности рассматриваемого композита. Область V , содержащую представительный элемент структуры композита в виде половины составной частицы с радиусом R_2 , выберем в форме прямого цилиндра с достаточно большой площадью S_0 параллельных оснований, одно из которых соответствует в сферических координатах значению $\theta = \pi/2$, а точки второй имеют координаты $r \cos \theta = H$, т.е. высота цилиндра равна H , причем $H \gg R_2$. Боковую поверхность цилиндра примем идеально теплоизолированной, температуру основания при $\theta = \pi/2$ положим равной нулю, а на втором основании зададим температуру GH . Однородный материал в части области вне составной частицы имеет коэффициент теплопроводности λ . Таким образом, в неоднородной цилиндрической области объемом $V_0 = HS_0$, ограниченной поверхностью S , распределение температуры $T(M)$ и коэффициент теплопроводности $\Lambda(M)$ являются функциями координат точки $M \in V$, причем функция $\Lambda(M)$ — кусочно-постоянная и принимает значения λ_1 при $R_0 \leq r \leq R_1$, λ_2 при $R_1 \leq r \leq R_2$ и λ при $r \geq R_2$.

Для минимизируемого функционала [4]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \Lambda(M) (\nabla T(M))^2 dV(M) + \\ + 2\pi R_1^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} \Delta T_K(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (13)$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона, а $\Delta T_K(\theta)$ — разность температур на контактной полусферической поверхности радиусом R_1 . Примем при $r \geq R_1$ в качестве допустимого линейное по высоте цилиндра распределение температуры с постоянной составляющей градиента G , т.е.

$$T^*(r, \theta) = Gr \cos \theta, \quad (14)$$

а в шаровом включении аналогично соотношению (3)

$$T_1^*(r, \theta) = (\bar{A}_1 r + \bar{B}_1 / r^2) \cos \theta. \quad (15)$$

Из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом соотношения (15) получим равенство

$$\bar{A}_1 = 2\bar{B}_1 / R_0^3, \quad (16)$$

аналогичное формуле (5). При $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока с использованием соотношений (15) и (16) следует

$$\beta(G - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3/2)) = \bar{\lambda}\bar{A}_1(1 - \bar{R}_0^3).$$

Отсюда находим

$$\bar{A}_1 = \frac{G\beta}{\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)} \quad (17)$$

и

$$\Delta T_{\text{к}}(\theta) = \frac{GR_1\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)\cos\theta}{\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)}. \quad (18)$$

Составляющие градиента температуры в шаровом включении, согласно соотношению (15), равны

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial r} = (\bar{A}_1 - 2\bar{B}_1/r^3)\cos\theta \quad \text{и} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial T_1^*}{\partial\theta} = -(\bar{A}_1 + \bar{B}_1/r^3)\sin\theta,$$

что позволяет вычислить

$$(\nabla T_1^*)^2 = (\bar{A}_1^2 + 2\bar{A}_1\bar{B}_1)(1 - 3\cos^2\theta)/r^3 + \bar{B}_1^2(1 + 3\cos^2\theta)/r^6. \quad (19)$$

Тогда из формулы (13) с учетом равенств (14), (16), (18) и (19) получим

$$J_1[T] = \lambda\frac{G^2}{2}HS_0 - \frac{2\pi R_2^3}{3}\lambda\frac{G^2}{2} + 2\pi\frac{R_2^3 - R_1^3}{3}\lambda_2\frac{G^2}{2} + 2\pi\frac{R_1^3 - R_0^3}{3} \times \\ \times \lambda_1\frac{\bar{A}_1^2}{2}(1 + \bar{R}_0^3/2) + 2\pi\frac{R_1^3}{3}\lambda_2\frac{\bar{\lambda}^2\beta(1 - \bar{R}_0^3)^2}{(\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2))^2}. \quad (20)$$

Примем для максимизируемого функционала [4]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2}\int_V \frac{(\mathbf{q}(M))^2}{\Lambda(M)} dV(M) - \int_S T(P)\mathbf{q}(P) \cdot \mathbf{n}(P) dS(P) - \\ - 2\pi R_1^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi/2} \Delta T_{\text{к}}(\theta) \sin\theta d\theta, \quad P \in S, \quad (21)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , в качестве допустимого распределения вектора плотности теплового потока \mathbf{q} при $r \geq R_1$ постоянное значение $q = -\lambda G$ единственной составляющей этого вектора, перпендикулярной основаниям цилиндра. В шаровом включении скалярный квадрат вектора плотности теплового потока представим с учетом соотношения (19) в виде

$$\mathbf{q}^2 = \lambda_1^2(\nabla T_1^\circ)^2 = \\ = (\tilde{A}_1^2 + 2\tilde{A}_1\tilde{B}_1)(1 - 3\cos^2\theta)/r^3 + \tilde{B}_1^2(1 + 3\cos^2\theta)/r^6, \quad (22)$$

соответствующем распределению температуры во включении, определяемому формулой

$$T_1^\circ(r, \theta) = (\tilde{A}_1 r + \tilde{B}_1/r^2)\cos\theta, \quad (23)$$

аналогичной формуле (15). Из условия отсутствия теплообмена в полости шарового включения с учетом соотношения (23) находим

$$\tilde{A}_1 = 2\tilde{B}_1/R_0^3, \quad (24)$$

а при $r = R_1$ из условия непрерывности плотности теплового потока с использованием соотношений (23) и (24) следует

$$q = -\lambda G = -\lambda_1(\tilde{A}_1 - 2\tilde{B}_1/R_1^3) = -\lambda_1\tilde{A}_1(1 - \bar{R}_0^3).$$

Отсюда находим

$$\tilde{A}_1 = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{G}{1 - \bar{R}_0^3}. \quad (25)$$

В данном случае $\Delta T_K(\theta) = (\lambda/\alpha)G \cos \theta$ и формула (21) с учетом соотношений (22), (24) и (25) примет вид

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda G)^2}{2} \left(\frac{HS_0 - 2\pi R_2^3/3}{\lambda} + 2\pi \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\lambda_2} + \right. \\ \left. + 2\pi R_1^3 \frac{(1 + \bar{R}_0^3/2)}{3\lambda_1(1 - \bar{R}_0^3)} + 2\pi \frac{R_1^3}{3\lambda_2\beta} \right) + \lambda G^2 HS_0. \quad (26)$$

Принятые в качестве допустимых распределения температуры и плотности теплового потока для неоднородной области отличаются от действительных и поэтому значения $J_1[T]$ и $I_1[q]$ не будут совпадать, причем $J_1[T] > I_1[q]$. В промежутке между этими значениями должно быть расположено и значение $J_0 = (\lambda/2)G^2 HS_0$ минимизируемого функционала (13) для однородной области с коэффициентом теплопроводности λ . Тогда при $(R_1/R_2)^3 = C_V$ с учетом формулы (20) из условия $J_1[T] \geq J_0$ получим

$$\tilde{\lambda} \leq (1 - C_V) + \bar{\lambda}\beta \frac{\bar{\lambda} + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)(1 - \bar{R}_0^3)}{(\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3) + \beta(1 + \bar{R}_0^3/2))^2} = \tilde{\lambda}_+,$$

а при использовании формулы (26) из условия $I_1[q] \leq J_0$ найдем

$$\tilde{\lambda} \geq \frac{1}{1 - C_V + (C_V/\bar{\lambda})(1 + \bar{R}_0^3/2)/(1 - \bar{R}_0^3) + C_V/\beta} = \tilde{\lambda}_-.$$

На рис. 1 для случая $R_0 = 0$ и $\beta = 1$ при различных значениях $\bar{\lambda}$ приведены графики зависимостей от C_V верхней $\tilde{\lambda}_+$ (штрихпунктирные линии) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (штриховые линии) оценок отношения $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_2$. Сплошными линиями представлены графики зависимостей $\tilde{\lambda}$, построенные по формуле (9), которая в случае $R_0 = 0$ принимает вид

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\bar{\lambda} + \beta(2 + \bar{\lambda}) - 2(\beta(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda})C_V}{2\bar{\lambda} + \beta(2 + \bar{\lambda}) + (\beta(1 - \bar{\lambda}) + \bar{\lambda})C_V}. \quad (27)$$

Из этого рисунка следует, что разность $\tilde{\lambda}_+ - \tilde{\lambda}_-$ уменьшается по мере увеличения значения $\bar{\lambda}$. При $\bar{\lambda} = 10$ и $\bar{\lambda} = 100$ кривые для $\tilde{\lambda}_-$, отмеченные соответственно светлыми кружками и квадратами, практически совпадают со сплошными кривыми для $\tilde{\lambda}$ и штрихпунктирными

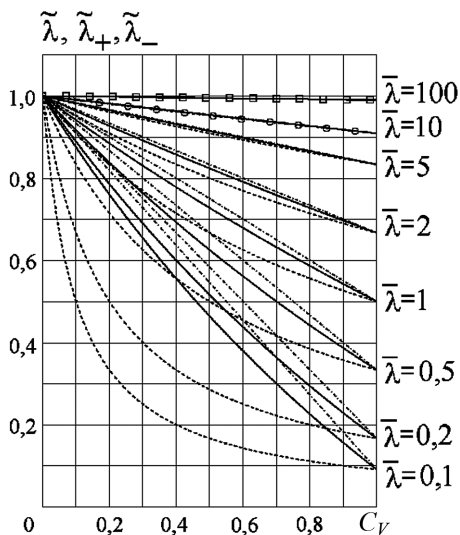


Рис. 1. Графики зависимостей при различных $\bar{\lambda}$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ (штрихпунктирные линии) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (штриховые линии) оценок эффективного коэффициента теплопроводности $\tilde{\lambda}$ (сплошные кривые) от объемной концентрации C_V при $\beta = 1$

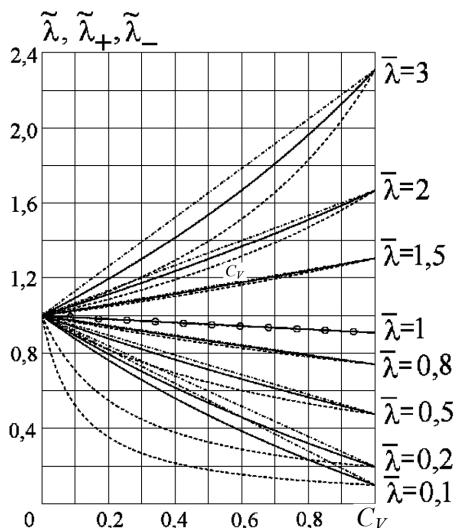


Рис. 2. Графики зависимостей при различных $\bar{\lambda}$ верхней $\tilde{\lambda}_+$ (штрихпунктирные линии) и нижней $\tilde{\lambda}_-$ (штриховые линии) оценок эффективного коэффициента теплопроводности $\tilde{\lambda}$ (сплошные кривые) от объемной концентрации C_V при $\beta = 10$

кривыми для $\tilde{\lambda}_+$, поскольку различие в значениях $\tilde{\lambda}_-$, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\lambda}_+$ очень мало. Например, для $C_V = 0,5$ при $\bar{\lambda} = 10$ $\tilde{\lambda}_- = 0,9524$, $\tilde{\lambda} = 0,9538$ и $\tilde{\lambda}_+ = 0,9545$, а при $\bar{\lambda} = 100$ $\tilde{\lambda}_- = 0,995025$, $\tilde{\lambda} = 0,995041$ и $\tilde{\lambda}_+ = 0,995050$.

С увеличением параметра β тепловой контакт между включениями и матрицей улучшается. Поэтому при прочих равных условиях значения $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_-$ и $\tilde{\lambda}_+$ возрастают. На рис. 2 представлены зависимости, аналогичные графикам на рис. 1, но при $\beta = 10$. Следует отметить, что в случае сплошных шаровых включений ($R_0 = 0$) оценки $\tilde{\lambda}_-$ и $\tilde{\lambda}_+$, а также правая часть формулы (23) не изменяют своих значений при перестановке значений β и $\bar{\lambda}$. Например, графики на рис. 2 для $\bar{\lambda} = 1$ идентичны графикам на рис. 1 для $\bar{\lambda} = 10$.

На рис. 1 видно, что при $\beta = 1$ ширина полосы, ограниченной кривыми для верхней $\tilde{\lambda}_+$ и нижней $\tilde{\lambda}_-$ оценок, увеличивается по мере уменьшения значения $\bar{\lambda}$, несмотря на совпадение значений $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}_+$ и $\tilde{\lambda}_-$ при $C_V = 0$ и $C_V = 1$. При $\beta = 10$ ширина такой полосы растет по мере отклонения значений $\bar{\lambda}$ от единицы. Возможная причина состоит в том, что для таких сочетаний β и $\bar{\lambda}$ использованные выше допустимые для функционалов распределения плотности теплового потока и температуры становятся достаточно грубыми. Уточним эти распределения с учетом переменных плотности теплового потока и градиента температуры не только в шаровом включении, но и в шаро-

вом слое матрицы, входящем в представительный элемент структуры композита.

В дополнение к формуле (15), описывающей распределение температуры в шаровом включении, допустимое для минимизируемого функционала (13) распределение температуры в шаровом слое матрицы примем аналогично соотношению (4) в виде

$$T_2^*(r, \theta) = (\bar{A}_2 r + \bar{B}_2 / r^2) \cos \theta. \quad (28)$$

Для нахождения коэффициентов \bar{A}_2 и \bar{B}_2 и уточненного соотношения для коэффициента \bar{A}_1 в формуле (15) используем с учетом равенства (16) условие непрерывности плотности теплового потока при $r = R_1$ в виде

$$\bar{A}_2 - 2\bar{B}_2 / R_1^3 = \beta(\bar{A}_2 + \bar{B}_2 / R_1^3 - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3 / 2)) = \bar{\lambda} \bar{A}_1(1 - \bar{R}_0^3) \quad (29)$$

и граничное условие для температуры при $r = R_2$ в форме

$$\bar{A}_2 R_2 + \bar{B}_2 / R_2^2 = G R_2. \quad (30)$$

Отсюда получим

$$\bar{A}_1 = 3Gb/Z, \quad \bar{A}_2 = G(2\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3))/Z,$$

$$\bar{B}_2 / R_1^3 = G(\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3))/Z,$$

где $Z = \beta(1 + \bar{R}_0^3/2)(2 + C_V) + \bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)(2 + \beta + (1 - \beta)C_V)$.

В рассматриваемом случае с учетом формул (15) и (28)

$$\begin{aligned} \Delta T_K(\theta) &= T_2^*(R_1, \theta) - T_1^*(R_1, \theta) = \\ &= \left(\bar{A}_2 + \frac{\bar{B}_2}{R_1^3} - \bar{A}_1(1 + \bar{R}_0^3/2) \right) R_1 \cos \theta = 3G\bar{\lambda} \frac{1 - \bar{R}_0^3}{Z} R_1 \cos \theta. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда из формулы (13) получим

$$\begin{aligned} J_1[T] &= \lambda \frac{G^2}{2} (HS_0 - 2\pi R_2^3/3) + 2\pi \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \lambda_2 \left(\frac{\bar{A}_2^2}{2} + \frac{\bar{B}_2^2}{R_1^3 R_2^3} \right) + \\ &+ 2\pi \frac{R_1^3 - R_0^3}{3} \lambda_1 \frac{\bar{A}_1^2}{2} (1 + \bar{R}_0^3/2) + 2\pi \frac{R_1^3}{3} \lambda_2 \beta \left(\frac{3G\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)}{Z} \right)^2, \end{aligned}$$

что с учетом условия $J_1(T) \geq J_0(T) = (\lambda/2)G^2 HS_0$ приводит к неравенству

$$\tilde{\lambda} \leq \frac{1 - C_V}{G^2} \left(\bar{A}_2^2 + 2C_V \frac{\bar{B}_2^2}{R_1^6} \right) + C_V \bar{\lambda} \bar{A}_1^2 \frac{1 + \bar{R}_0^3/2}{G^2} + C_V \beta \left(3\bar{\lambda} \frac{1 - \bar{R}_0^3}{Z} \right)^2 = \tilde{\lambda}_+^{\circ}.$$

При построении допустимого для максимизируемого функционала (21) распределения плотности теплового потока используем прежние формулы (15) и (28), обозначив в них коэффициенты через A_1^* , B_1^* и A_2^* , B_2^* соответственно. Для нахождения этих коэффициентов остаются справедливыми равенства вида (16) и (29), а граничное условие (30) следует заменить на условие $q = -\lambda G = -\lambda_2(A_2^* - 2B_2^*/R_2^3)$ непрерывности нормальной к сферической поверхности радиусом R_2

составляющей вектора плотности теплового потока. В итоге получим

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1^*}{G\tilde{\lambda}} = 3\beta/Z_1, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2^*}{G\tilde{\lambda}} = \frac{2\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(2 + \beta)(1 - \bar{R}_0^3)}{Z_1},$$

$$\tilde{B}_2/R_1^3 = B_2^*/(R_1^3 G\tilde{\lambda}) = (\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \beta)(1 - \bar{R}_0^3))/Z_1,$$

где $Z_1 = 2(1 - C_V)(\beta(1 + \bar{R}_0^3/2) + \bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)) + (1 + 2C_V)\bar{\lambda}\beta(1 - \bar{R}_0^3)$, и по аналогии с формулой (16) $B_1^*/R_0^3 = A_1^*/2$.

Теперь в правой части равенства (31) для разности температур на контактной поверхности при $r = \tilde{R}_1$ необходимо заменить знаменатель Z на Z_1 и добавить множитель $\tilde{\lambda}$. Тогда из формулы (21) получим

$$I_1[q] = -\frac{(\lambda G)^2 HS_0 - 2\pi R_2^3/3}{2\lambda} - 2\pi \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\lambda_2} \left(\frac{\tilde{A}_2^2}{2} - \frac{\tilde{B}^2}{R_1^3 R_2^3} \right) (\lambda G)^2 - \\ - \frac{2\pi}{3} R_1^3 \left((1 - \bar{R}_0^3)\lambda_1 \frac{\tilde{A}_1^2}{2} (1 + \bar{R}_0^3/2) + \beta\lambda_2 \left(\frac{3\bar{\lambda}(1 - \bar{R}_0^3)}{Z_1} \right)^2 \right) \times \\ \times \left(\frac{\lambda G}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda G^2 HS_0.$$

Отсюда с учетом условия $I_1(q) \leq J_0(T) = (\lambda/2)G^2 HS_0$ находим

$$\tilde{\lambda} \geq \frac{1}{(1 - C_V)M + C_V S} = \tilde{\lambda}_-^{\circ},$$

где

$$M = \tilde{A}_2^2 + 2C_V \tilde{B}_2^2/R_1^6 \quad \text{и} \quad S = \bar{\lambda} \tilde{A}_1^2 (1 - \bar{R}_0^3) (1 + \bar{R}_0^3/2) + \beta (3\bar{\lambda} (1 - \bar{R}_0^3)/Z_1)^2.$$

Непосредственная проверка показывает, что при $C_V \in [0, 1]$, $\bar{R}_0 \in [0, 1)$ и любых положительных значениях параметров β и $\bar{\lambda}$ значения $\tilde{\lambda}_+^{\circ}$ и $\tilde{\lambda}_-^{\circ}$ совпадают между собой и со значением $\tilde{\lambda}$, вычисляемым по формуле (9). Это означает, что в рамках использованной математической модели с выбранным представительным элементом структуры рассматриваемого композита формула (9) обеспечивает получение достоверных результатов при таких значениях $C_V < 1$, когда можно пренебречь тепловым взаимодействием между соседними включениями.

Работа выполнена по гранту НШ-255.2012.8 программы государственной поддержки ведущих научных школ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац Е.А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. с англ. М.: Наука, 1964.
3. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.

REFERENCES

1. *Kats E.A.* Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Pedigree of forms and ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008. 296 p.
2. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1959. 520 p. (Russ. ed.: Karslou G., Eger D. Teploprovodnost' tverdykh tel. Moscow, Nauka Publ., 1964. 488 p).
3. *Zarubin V.S.* Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.
4. *Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.* Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGТУ im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.

Статья поступила в редакцию 27.07.2012

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savelieva — assoc. professor of the “Applied mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conductivity.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.