

## МИНИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАЗВОРОТОВ ДОВОДОЧНОЙ СТУПЕНИ С ДВИГАТЕЛЕМ ГЛУБОКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

*Рассмотрена задача оптимизации управления движением доводочной ступени многоступенчатого летательного аппарата двойного назначения. В качестве направлений решения задачи выделены оптимизация поступательного движения изделия, оптимизация пространственных разворотов и организация движения в направлении поперечных осей. Приведены алгоритмы, реализующие предлагаемые подходы.*

Доводочные ступени (ДС) многоступенчатых летательных аппаратов (ЛА) предназначены для выведения в требуемые точки отделения (ТО) полезных грузов (ПН). Доводочные системы относятся к так называемым объектам двойного назначения, поскольку предназначены для решения как боевых, так и конверсионных задач [1].

Существующие алгоритмы управления (АУ) движением таких ДС обеспечивают выполнение поставленных перед ними задач с достаточной степенью надежности, однако повышение требований точности и расширение зоны применения подобных изделий выдвигают задачу оптимизации алгоритмов системы управления (СУ).

Под оптимизацией движения изделия будем понимать минимизацию времени разведения ПН по ТО. В данном случае эта задача тождественна задаче минимизации расхода топлива на траектории полета ДС, что может послужить предпосылкой к сокращению гарантийных запасов топлива или увеличению зоны разведения ПН.

**Доводочные системы как объект управления.** Для описания движения ДС будем использовать инерциальную стартовую систему координат (ИСК)  $O, \xi, \eta, \zeta$  и связанную (ССК) с объектом движения систему [2].

На ДС реализована моментная схема управления угловым движением (УД), формирующая управляющий момент (УМ) в виде пары сил. Такая схема обеспечивается четырьмя толкающими и четырьмя тянущими соплами или органами управления (ОУ), установленными неподвижно и позволяющими реализовать поступательное движение изделия в толкающей и тянущей схемах. Схематический вид ДС приведен на рис. 1.

Самостоятельный полет ДС после отделения от носителя проходит на большой высоте в условиях отсутствия атмосферы, в силу чего

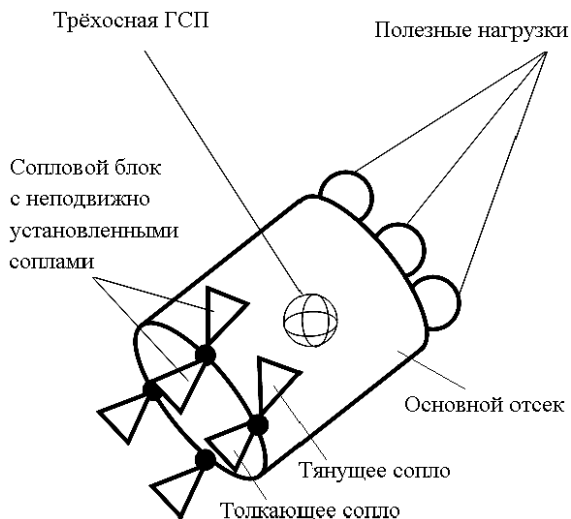


Рис. 1. Схематический вид ДС

модель поступательного и вращательного движения ДС заметно упрощается [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V}_\xi &= P \cos \vartheta \cos \psi; & I_X \dot{\omega}_X &= (I_Y - I_Z) \omega_Y \omega_Z + M_{\Sigma X}; \\
 m\dot{V}_\eta &= P \sin \vartheta - g_0; & I_Y \dot{\omega}_Y &= (I_Z - I_X) \omega_Z \omega_X + M_{\Sigma Y}; \\
 m\dot{V}_\zeta &= -P \cos \vartheta \sin \psi; & I_Z \dot{\omega}_Z &= (I_X - I_Y) \omega_X \omega_Y + M_{\Sigma Z}; \\
 \dot{\xi} &= V_\xi; & \dot{\varphi} &= \omega_X - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_Y \cos \varphi - \omega_Z \sin \varphi); \\
 \dot{\eta} &= V_\eta; & \dot{\vartheta} &= \omega_Y \sin \varphi + \omega_Z \cos \varphi; \\
 \dot{\zeta} &= V_\zeta; & \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_Y \cos \varphi - \omega_Z \sin \varphi);
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$m = m_0 \int_0^t |\dot{m}(\tau)| d\tau.$$

Здесь  $V_\xi, V_\eta, V_\zeta$  – компоненты скорости центра масс (ЦМ) ДС;  $P$  – сила тяги (СТ) ДУ;  $m$  и  $m_0$  – текущая и начальная масса ДС;  $|\dot{m}(\tau)|$  – массовый секундный расход топлива;  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  – проекции вектора абсолютной угловой скорости (УС) ДС на оси ССК;  $I_X, I_Y, I_Z$  – осевые моменты инерции ДС;  $M_{\Sigma i} = M_{упрi} + M_{вi}$  – сумма управляющего и возмущающего моментов;  $\varphi, \vartheta, \psi$  – углы крена, тангажа и рысканья (углы Эйлера–Крылова), измеряемые трехосной гиросtabilизированной платформой (ГСП).

В качестве ДУ используется твердотопливный двигатель с регулируемой тягой (ТРДУ), обеспечивающий движение ДС в пониженном, промежуточном и маршевом режимах. Использование в ДУ твердого топлива позволяет исключить из модели изделия учет колебаний жидкого топлива в баках.

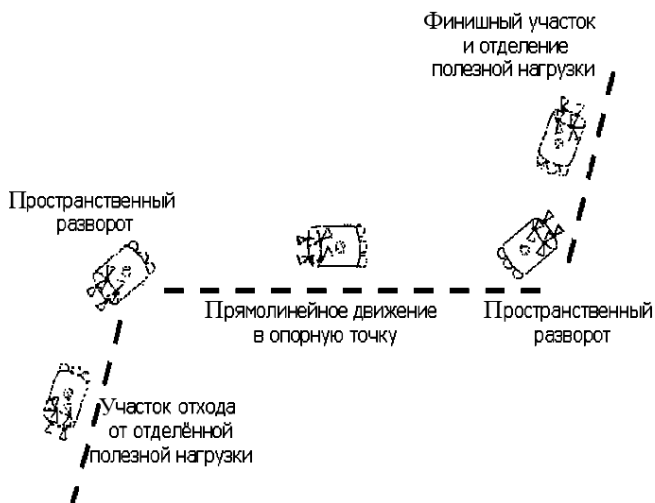


Рис. 2. Траектория ДС на участке движения между двумя ТО ПН

**Направления решения задачи оптимизации управления движением ДС.** Рассмотрим типичную траекторию движения ДС и характер совершаемых ею маневров. Несмотря на то, что число ПН и длины участков движения могут быть различными, траектория движения от одной ТО ПН до другой, включающая пять участков, является для ДС стандартной и схематично изображена на рис. 2.

В соответствии с приведенной траекторией можно ввести следующие направления оптимизации движения ДС: оптимизация поступательного движения в направлении продольной оси (движение изделия в режиме маршевой тяги на длительных участках), оптимизация пространственных поворотов и применение АУ движением ДС в боковых направлениях. Рассмотрим два последних варианта более подробно.

**Оптимизация пространственных поворотов ДС.** В СУ нескольких поколений ДС используется так называемая традиционная схема пространственного разворота. Согласно ей, начальное угловое положение ДС описывается текущими углами ГСП  $\vartheta_n, \psi_n, \varphi_n$  перед началом разворота. Конечное положение определяется навигационными углами  $\vartheta_k, \psi_k, \varphi_k$ , соответствующими концу разворота. Основой алгоритма разворота является отработка имеющихся в каналах управления угловых рассогласований (УР)

$$\Delta\beta = \beta_n - \beta_k, \quad \beta = \vartheta, \psi, \varphi \quad (2)$$

между текущими углами ГСП и навигационными углами.

Пусть  $k_{\max}$  — уровень ограничения УР на развороте, полученный из соображений высокой динамики разворота при минимальном уровне динамических ошибок. Для каждого канала это значение уменьшается пропорционально величине отношения имеющегося в канале УР и

суммарного УР в трех каналах:

$$k_{\beta \max} = \frac{\Delta\beta}{|\Delta\vartheta| + |\Delta\psi| + |\Delta\varphi|} k_{\max}, \quad \beta = \vartheta, \psi, \varphi. \quad (3)$$

Пусть  $T_0$  — время такта бортовой цифровой вычислительной машины (БЦВМ),  $\vartheta_{n-1}$ ,  $\psi_{n-1}$ ,  $\varphi_{n-1}$  — значения углов ГСП на предыдущем такте. Тогда в ИСК сигналы стабилизации запишутся в виде

$$\delta_\beta = \min(k_{\beta \max}, \beta_n - \beta_k) + \tau_{AC} \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{T_0}, \quad \beta = \vartheta, \psi, \varphi. \quad (4)$$

Первое слагаемое в выражении (4) характеризует максимальное значение, на которое может выйти УС в каждом канале. Второе слагаемое определяет текущую величину УС.

Далее сигналы  $\delta_\vartheta$ ,  $\delta_\psi$ ,  $\delta_\varphi$  пересчитываются в ССК с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \delta_X &= K_X(\delta_\psi \cos \vartheta_n + \delta_\varphi \sin \vartheta_n \cos \psi_n); \\ \delta_Y &= K_Y(-\delta_\psi \sin \vartheta_n + \delta_\varphi \cos \vartheta_n \cos \psi_n); \\ \delta_Z &= K_Z(\delta_\vartheta - \delta_\varphi \sin \psi_n), \end{aligned} \quad (5)$$

определяющих управляющие сигналы автомата угловой стабилизации, где  $K_X$ ,  $K_Y$ ,  $K_Z$  — коэффициенты усиления.

Рассмотрим теперь усовершенствованный *квазиоптимальный кватернионный алгоритм (ККА) пространственной переориентации*. Согласно Эйлеру любое вращательное движение твердого тела эквивалентно плоскому вращению вокруг некоторой оси. Суть ККА заключается в замене алгоритма пространственного разворота ДС по трем углам плоским разворотом вокруг оси Эйлера. Рассчитаем единичный вектор оси и соответствующий угол поворота.

Известно соотношение для кватерниона  $\Lambda$ , соответствующего тройке  $\vartheta_n$ ,  $\psi_n$ ,  $\varphi_n$  начальных углов разворота [3]:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) + \sin\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) - \cos\left(\frac{\vartheta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (6) \end{aligned}$$

Аналогично определяется кватернион  $N$ , соответствующий конечным углам  $\vartheta_k, \psi_k, \varphi_k$ . Из теории конечного поворота твердого тела известно соотношение для кватерниона разворота  $M$  [3]:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \frac{\tilde{\Lambda} \bullet N}{\|\Lambda\|}, \quad (7)$$

где  $\|\Lambda\|$  — норма кватерниона, а  $\tilde{\Lambda}$  — сопряженный кватернион. Компоненты кватерниона рассчитываются по следующим формулам [3]:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \lambda_0\nu_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3; \\ \mu_1 &= \lambda_0\nu_1 - \lambda_1\nu_0 - \lambda_2\nu_3 + \lambda_3\nu_2; \\ \mu_2 &= \lambda_0\nu_2 - \lambda_2\nu_0 - \lambda_3\nu_1 + \lambda_1\nu_3; \\ \mu_3 &= \lambda_0\nu_3 - \lambda_3\nu_0 - \lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно определить единичный вектор оси и угол поворота:

$$\bar{l} = \begin{pmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \\ \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \\ \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}} \end{pmatrix}; \quad \chi = 2 \arccos \mu_0. \quad (9)$$

**Расчет угловых ускорений (УУ) для ККА.** В системе управления ДС с ТРДУ одни и те же органы управления используются в системе стабилизации давления (ССД) ДУ и для управления полетом ДС. При моментном развороте вначале формируются сигналы ССД

$$\delta_{\Sigma}^{\text{толк}} = \delta_{\text{пр}}^{\text{толк}} + \frac{\delta_{\text{ССД}}}{2}; \quad \delta_{\Sigma}^{\text{тян}} = \delta_{\text{пр}}^{\text{тян}} - \frac{\delta_{\text{ССД}}}{2}, \quad (10)$$

где сигнал  $\delta_{\Sigma}^{\text{толк}}$  подается на толкающие, а  $\delta_{\Sigma}^{\text{тян}}$  — на тянущие сопла. Программные сигналы  $\delta_{\text{пр}}^{\text{толк}}$  и  $\delta_{\text{пр}}^{\text{тян}}$  выбираются из условия требуемой суммы площадей критических сечений сопел  $\Sigma \mu F_i$  и условия нулевой продольной силы  $F_X = 0$ .

Суммарный сигнал на ОУ формируется в следующем виде:

$$\delta_{\Sigma i} = \delta_{\Sigma}^{\text{толк}} + \delta_i, \quad i = 1, \dots, 4; \quad \delta_{\Sigma i} = \delta_{\Sigma}^{\text{тян}} + \delta_i, \quad i = 5, \dots, 8, \quad (11)$$

где  $\delta_i, i = 1, \dots, 8$  — командные сигналы (КС) УД ДС.

Рабочий диапазон для всех сопел составляет от  $-N_{\text{имп}}$  до  $+N_{\text{имп}}$  импульсов, и сигналы  $\delta_i$  должны располагаться в так называемом свободном диапазоне, т.е. диапазоне, остающемся за вычетом импульсов  $\delta_{\Sigma}^{\text{толк}}$  и  $\delta_{\Sigma}^{\text{тян}}$ . Учитывая особенности конструкции ДС, определим сво-

бодные диапазоны для толкающих и тянущих ОУ:

$$\Delta_{\text{толк}} = N_{\text{имп}} + \delta_{\Sigma}^{\text{толк}}; \quad \Delta_{\text{тян}} = N_{\text{имп}} - \delta_{\Sigma}^{\text{тян}}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь вычисление максимальных УУ на участках разгона и торможения. При этом зададимся задачей использования максимальных УМ, при которых ОУ находились бы на упоре на обоих участках. Учитывая, что в процессе разворота ось Эйлера сохраняет свое положение, можно получить программные значения ускорений в ССК, используя упрощенные уравнения УД ДС:

$$\dot{\omega}_{\text{ипр}} = l_i(\ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}} + \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{тян}}) = -(C_{i\delta}^{\text{толк}} \delta_i^{\text{толк}} + C_{i\delta}^{\text{тян}} \delta_i^{\text{тян}}), \quad i = X, Y, Z, \quad (13)$$

где  $C_{i\delta}^{\text{тян}}$ ,  $C_{i\delta}^{\text{толк}}$ ,  $i = X, Y, Z$  — эффективности в каналах управления относительно осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  для тянущей и толкающей схем.

При выборе коэффициентов усиления в алгоритме стабилизации выполняются следующие соотношения:

$$C_{i\delta}^{\text{толк}} K_i^{\text{толк}} = C_{i\delta}^{\text{тян}} K_i^{\text{тян}} = K_d, \quad i = X, Y, Z, \quad (14)$$

где  $K_d$  — динамический коэффициент, определяемый из условия обеспечения достаточных запасов устойчивости. Тогда

$$\delta_i^{\text{толк}} = \frac{-K_i^{\text{толк}} l_i \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d}, \quad i = X, Y, Z. \quad (15)$$

Для тянущей схемы формулы полностью аналогичны.

По сигналам  $\delta_X$ ,  $\delta_Y$ ,  $\delta_Z$  формируются КС на соответствующие сопла:

$$\delta_1 = \delta_X^{\text{толк}} + \delta_Y^{\text{толк}} - \delta_Z^{\text{толк}} = - \frac{(K_X^{\text{толк}} l_X + K_Y^{\text{толк}} l_Y - K_Z^{\text{толк}} l_Z) \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d} = \frac{\delta_1' \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d};$$

$$\delta_2 = -\delta_X^{\text{толк}} + \delta_Y^{\text{толк}} + \delta_Z^{\text{толк}} = - \frac{(-K_X^{\text{толк}} l_X + K_Y^{\text{толк}} l_Y + K_Z^{\text{толк}} l_Z) \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d} = \frac{\delta_2' \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d}; \quad (16)$$

$$\delta_3 = \delta_X^{\text{толк}} - \delta_Y^{\text{толк}} + \delta_Z^{\text{толк}} = - \frac{(K_X^{\text{толк}} l_X - K_Y^{\text{толк}} l_Y + K_Z^{\text{толк}} l_Z) \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d} = \frac{\delta_3' \ddot{\chi}_{\text{пр}}^{\text{толк}}}{K_d}.$$

Формулы, описывающие КС полностью аналогичны приведенным ранее.

Отдельно рассмотрим восемь сигналов  $\delta'_1 \dots \delta'_8$  и найдем среди них максимальные и минимальные отдельно для толкающих и тянущих сопел. Эти сигналы будут характеризовать те максимально возможные ускорения, при которых по крайней мере один толкающий и один тянущий ОУ будут находиться на упоре, т.е. с полным использованием свободных диапазонов  $\Delta_{\text{толк}}$  и  $\Delta_{\text{тян}}$ :

$$\ddot{\chi}_{\text{разг}}^{\text{толк}} = \frac{K_d \Delta_{\text{толк}}}{\delta'_{\text{толк}} \max}; \quad \ddot{\chi}_{\text{торм}}^{\text{толк}} = \frac{K_d \Delta_{\text{толк}}}{\delta'_{\text{толк}} \min};$$

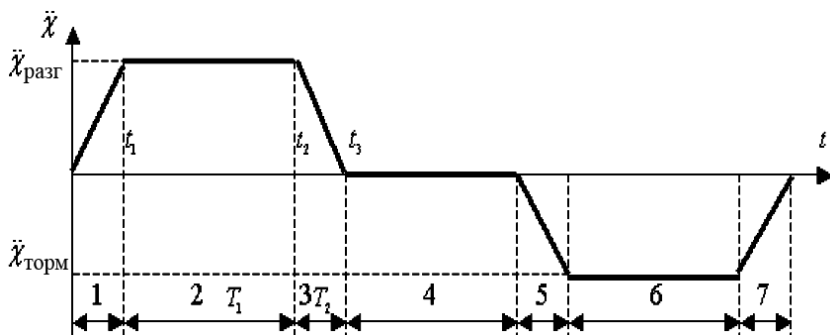
$$\ddot{\chi}_{\text{разг}}^{\text{тян}} = \frac{K_d \Delta_{\text{тян}}}{\delta'_{\text{тян}} \min}; \quad \ddot{\chi}_{\text{торм}}^{\text{тян}} = \frac{K_d \Delta_{\text{тян}}}{\delta'_{\text{тян}} \max}.$$
(17)

Суммируя ускорения разгона и торможения для толкающих и тянущих сопел, получим предельные значения ускорений для разворота в моментной схеме:

$$\ddot{\chi}_{\text{разг}}^{\text{мом}} = K_d \left( \frac{\Delta_{\text{толк}}}{\delta'_{\text{толк}} \max} - \frac{\Delta_{\text{тян}}}{\delta'_{\text{тян}} \min} \right); \quad \ddot{\chi}_{\text{торм}}^{\text{мом}} = K_d \left( \frac{\Delta_{\text{толк}}}{\delta'_{\text{толк}} \min} - \frac{\Delta_{\text{тян}}}{\delta'_{\text{тян}} \max} \right).$$
(18)

Реализация ККА с максимальными УУ разгона и торможения заключается в формировании программы разворота ДС непосредственно в его процессе в соответствии с полученными априорными формулами (18) для предельных УУ. На рис. 3 приведена временная диаграмма изменения УУ на развороте.

Участки 1, 3, 5, 7 представляют собой переход ОУ на значения, соответствующие максимальным УУ, и составляют несколько тактов БЦВМ. На участке 2 проводится прогноз программы и угла на этапе торможения. Он заканчивается, когда прогноз показывает, что угол в конце разворота будет близок к заданному. Участок 4 — это разворот с постоянной УС. Разворот произойдет тем быстрее, чем меньше будет длительность этого участка, однако полное его исключение может привести к повышению динамических ошибок. Участок 6 соответствует



**Рис. 3. Зависимость углового ускорения от времени на развороте:**

1, 5 — выход на участки разгона и торможения; 2, 6 — движение с УУ разгона и торможения; 3 — переход на участок движения с постоянной УУ; 4 — движение с постоянной УС; 7 — участок конца торможения

развороту с постоянным УУ торможения и длительностью, рассчитанной на участке прогноза.

Текущие скорость и угол поворота относительно оси Эйлера рассчитываются численным интегрированием

$$\dot{\chi}_n = \dot{\chi}_{n-1} + \frac{T}{2}(\ddot{\chi}_n + \ddot{\chi}_{n-1}); \quad \chi_n = \chi_{n-1} + \frac{T_0}{2}(\dot{\chi}_n + \dot{\chi}_{n-1}). \quad (19)$$

Согласно уравнению (15) программные КС зависят только от текущего УУ и координат оси Эйлера:

$$\delta_i^{\text{пр}} = -\frac{l_i \ddot{\chi}_n}{K_d}, \quad i = X, Y, Z. \quad (20)$$

Необходимым звеном ККА, ввиду разницы истинных и требуемых значений углов из-за упрощений модели УД ДС, является построение **автомата угловой стабилизации**, обеспечивающего движение ДС вблизи программных значений углов и УС. Для этого в ИСК считаются текущие УС

$$\dot{\beta}_n = \frac{\beta_n - \beta_{n-1}}{T_0}, \quad \beta = \vartheta, \psi, \varphi, \quad (21)$$

затем с помощью матрицы перехода они пересчитываются в ССК, и численным интегрированием определяются текущие углы в ССК:

$$\alpha_{ni} = \alpha_{n-1i} + (\omega_{ni} + \omega_{n-1i}) \frac{T_0}{2}, \quad i = X, Y, Z. \quad (22)$$

Теперь можно получить КС автомата стабилизации, отрабатывающего рассогласования по углам и УС:

$$\delta_i^{\text{AC}} = \alpha_{ni} - l_i \chi_n + \tau_{\text{AC}}(\omega_{ni} - l_i \dot{\chi}_n), \quad i = X, Y, Z. \quad (23)$$

Суммарные КС запишутся в виде

$$\delta_i = K_i(\delta_i^{\text{пр}} + \delta_i^{\text{AC}}), \quad i = X, Y, Z. \quad (24)$$

*Сравнение работы двух алгоритмов разворотов* приведено на рис. 4–6. Видно, что традиционный метод характеризуется большим участком движения с постоянной скоростью и плавным нарастанием УУ, а в случае ККА участок движения с постоянной скоростью минимален, разворот четко разбит на участки разгона и торможения. Характерно и поведение управляющих моментов. В отличие от традиционного алгоритма в случае ККА четко выделяются участки разгона и торможения с резкой переключкой с одного участка на другой. Все это приводит к сокращению времени переориентации ДС и, как следствие, времени, затрачиваемого на всю траекторию движения.

Сравнительное моделирование показало, что сокращение времени и расхода топлива в результате работы ККА в среднем составило около 10 %, что может быть использовано для экономии гарантийных запасов энергетики. Существенный выигрыш во времени переориентации



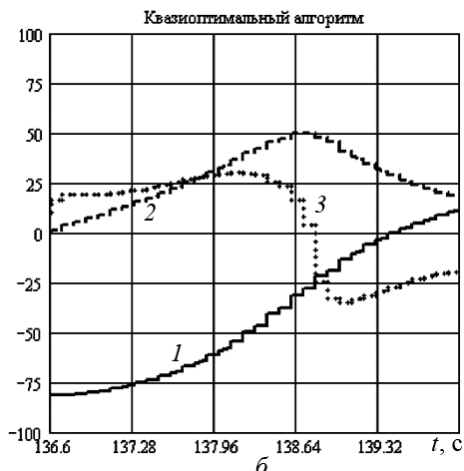
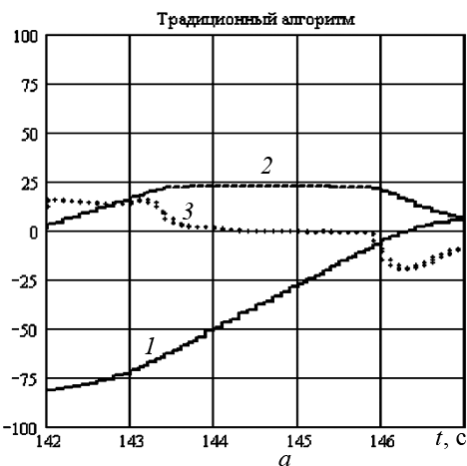


Рис. 4. Изменение угла (1), угловой скорости (2) и углового ускорения (3) на развороте

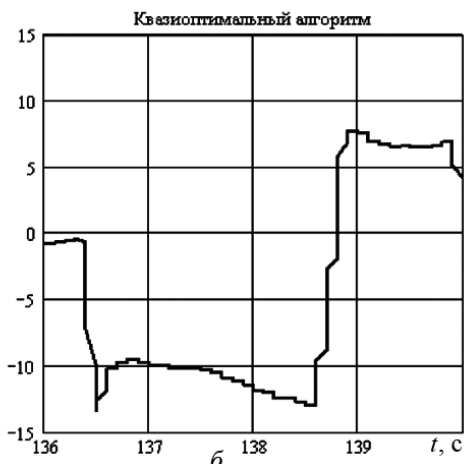
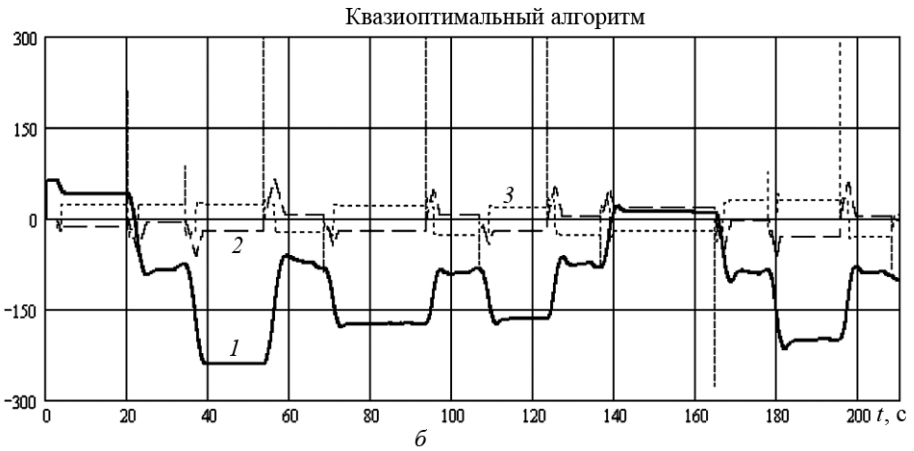
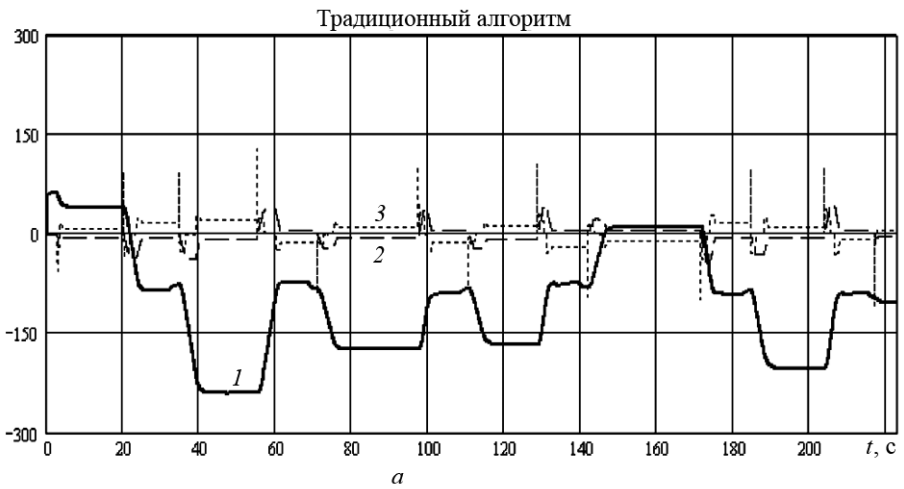


Рис. 5. Изменение управляющего момента  $M_y$  на участке разворота

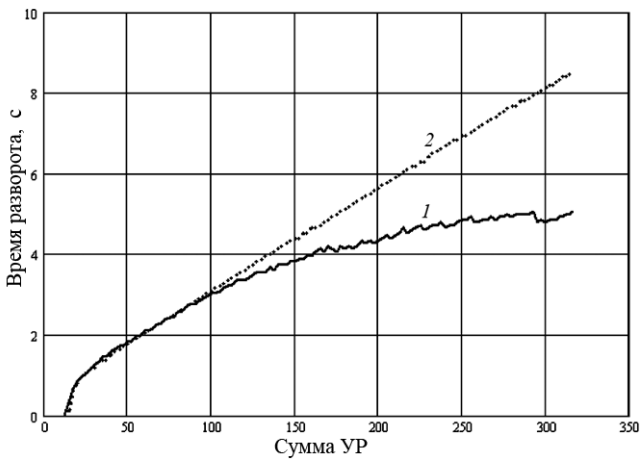
ККА обеспечивает при суммарном УР, большем  $100^\circ$ . Это иллюстрирует рис. 7.

**Оптимизация времени работы ДС за счет реализации движения в боковых направлениях.** В существующих АУ движением ДС моментная схема используется лишь для реализации квазимоментных разворотов, когда помимо наличия УМ присутствуют также и небольшие по модулю силы  $F_Y$  и  $F_Z$ , направленные по осям  $Y$  и  $Z$  ССК. При этом поступательное движение ДС, обусловленное действием этих сил, никак не используется СУ изделием.

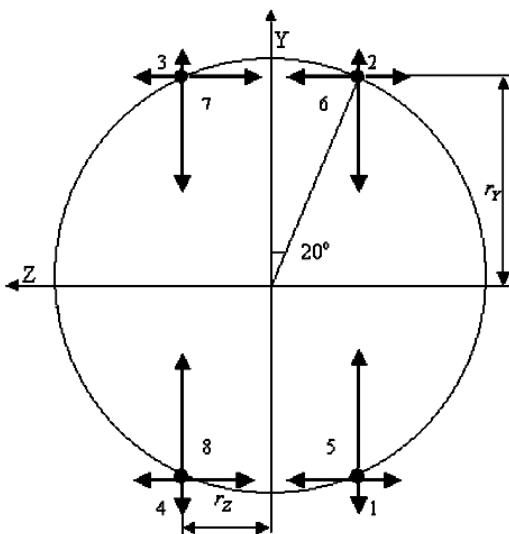
Число ограничений, накладываемых при разворотах на уравнения движения ДС, меньше количества независимых переменных, которыми являются СТ ОУ. Поэтому возникает свобода выбора накладываемых на уравнения движения дополнительных условий. Как следствие,



**Рис. 6.** Изменение угла (*I*), угловых скорости и ускорения на всей траектории движения ДС



**Рис. 7.** Зависимость времени традиционного *1* и квазиоптимального *2* разворотов от суммарного углового рассогласования



**Рис. 8. Проекция управляющих сил и моментов на оси ССК:**  
 1... 8 – номера ОУ

в моментной схеме при одновременной работе всех ОУ появляется возможность реализации поступательного движения в боковых направлениях, приводящего к оптимизации траектории. Например, для близких ТО ПН возможно движение между ТО только за счет боковых сил без изменения ориентации ДС на разворотах, что приводит к сокращению времени движения и затрат топлива.

Рассмотрим организацию бокового поступательного движения для случая нулевой продольной силы. Для простоты рассмотрим симметричную ДС ( $y_T = z_T = 0$ ). Запишем соотношения для проекций управляющих сил и УМ на оси ССК в соответствии с рис. 8:

$$\begin{aligned}
 F_X &= k_{X_{\text{тол}}}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - k_{X_{\text{тян}}}(R_5 + R_6 + R_7 + R_8); \\
 F_Y &= k_{Y_{\text{тол}}}(-R_1 + R_2 + R_3 - R_4) + k_{Y_{\text{тян}}}(R_5 - R_6 - R_7 + R_8); \\
 F_Z &= k_{Z_{\text{тол}}}(-R_1 - R_2 + R_3 + R_4) + k_{Z_{\text{тян}}}(R_5 + R_6 - R_7 - R_8); \\
 M_X &= (k_{Z_{\text{тол}}}r_Y - k_{Y_{\text{тол}}}r_Z)(R_1 - R_2 + R_3 - R_4) + \\
 &\quad + (k_{Y_{\text{тян}}}r_Z - k_{Z_{\text{тян}}}r_Y)(R_5 - R_6 + R_7 - R_8); \\
 M_Y &= (k_{X_{\text{тол}}}r_Z - k_{Z_{\text{тол}}}r_X)(-R_1 - R_2 + R_3 + R_4) + \\
 &\quad + (k_{X_{\text{тян}}}r_Z - k_{Z_{\text{тян}}}r_X)(R_5 + R_6 - R_7 - R_8); \\
 M_Z &= (k_{X_{\text{тол}}}r_Y - k_{Y_{\text{тол}}}r_X)(R_1 - R_2 - R_3 + R_4) + \\
 &\quad + (k_{X_{\text{тян}}}r_Y - k_{Y_{\text{тян}}}r_X)(-R_5 + R_6 + R_7 - R_8);
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $R_1 \dots R_8$  – СТ восьми ОУ;  $r_Y, r_Z$  – плечи сил по осям  $Y$  и  $Z$ ;  $k_{X_{\text{тол}}}, k_{X_{\text{тян}}}, k_{Y_{\text{тол}}}, k_{Y_{\text{тян}}}, k_{Z_{\text{тол}}}, k_{Z_{\text{тян}}}$  – коэффициенты, определяющие проекции СТ толкающих и тянущих сопел на оси ССК соответственно.

Найдем теперь максимально возможные силы  $F_Y$  и  $F_Z$ . Системы уравнений (26) и (27) представляют собой задачи линейного программирования (ЛП) с целевыми функциями  $F_Y, F_Z$  и рядом условий (сохранение ориентации ДС исключением управляющих моментов и конструктивно обусловленные ограничения СТ ОУ):

$$\left. \begin{aligned} F_X = F_Z = M_X = M_Y = M_Z = 0; \\ \sum_{i=1}^8 R_i = R_{\Sigma}^0; \\ 0 \leq R_i \leq \frac{R_{\Sigma}^0}{4}, \quad i = 1, \dots, 8; \\ F_Y \rightarrow \max; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} F_X = F_Y = M_X = M_Y = M_Z = 0; \\ \sum_{i=1}^8 R_i = R_{\Sigma}^0; \\ 0 \leq R_i \leq \frac{R_{\Sigma}^0}{4}, \quad i = 1, \dots, 8; \\ F_Z \rightarrow \max. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Рассмотрим задачу (26). Как следует из физического смысла (см. рис. 8) сила  $F_Y$  будет максимальна при выполнении соотношений:

$$R_1 = R_4 \equiv R_{14}; \quad R_2 = R_3 \equiv R_{23}; \quad R_5 = R_8 \equiv R_{58}; \quad R_6 = R_7 \equiv R_{67}. \quad (28)$$

В этом случае условия становятся тривиальными и задача ЛП приобретает вид

$$\left\{ \begin{aligned} k_{X_{\text{тол}}}(R_{14} + R_{23}) - k_{X_{\text{тян}}}(R_{58} + R_{67}) &= 0; \\ (k_{X_{\text{тол}}}r_Y + k_{Y_{\text{тол}}}r_X)(R_{14} - R_{23}) + \\ &+ (k_{X_{\text{тян}}}r_Y + k_{Y_{\text{тян}}}r_X)(R_{67} - R_{58}) = 0; \\ R_{14} + R_{23} + R_{58} + R_{67} &= \frac{R_{\Sigma}^0}{2}; \\ 0 \leq R_{14}, R_{23}, R_{58}, R_{67} &\leq \frac{R_{\Sigma}^0}{2}; \\ 2[k_{Y_{\text{тол}}}(R_{23} - R_{14}) + k_{Y_{\text{тян}}}(R_{58} - R_{67})] &\rightarrow \max. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Для частного случая  $k_{Y_{\text{тол}}} \ll k_{Y_{\text{тян}}}$  получим следующее решение:

$$\begin{aligned}
 F_{Y_{\text{max}}} &= \frac{k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0}{k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}}} \left( k_{Y_{\text{тян}}} \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X} - k_{Y_{\text{тол}}} \right); \\
 R_2 = R_3 = 0; \quad R_1 = R_4 &= \frac{k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0}{2(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})}; \\
 R_5 = R_8 &= \frac{R_{\Sigma}^0}{4(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})} \times \\
 &\times \left( k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}} \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X} \right); \\
 R_6 = R_7 &= \frac{R_{\Sigma}^0}{4(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})} \times \\
 &\times \left( k_{X_{\text{тол}}} - k_{X_{\text{тян}}} \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X} \right).
 \end{aligned} \tag{30}$$

В случае ненулевой  $F_X$  решение задачи (26) приобретает вид:

$$\begin{aligned}
 F_{Y_{\text{max}}} &= \frac{F_X + k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0}{k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}}} \left( k_{Y_{\text{тян}}} \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X} - k_{Y_{\text{тол}}} \right); \\
 R_2 = R_3 = 0; \quad R_1 = R_4 &= \frac{F_X + k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0}{2(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})}; \\
 R_5 = R_8 &= \\
 &= \frac{k_{X_{\text{тол}}} R_{\Sigma}^0 - F_X + (k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0 + F_X) \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X}}{4(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})}; \\
 R_6 = R_7 &= \\
 &= \frac{k_{X_{\text{тол}}} R_{\Sigma}^0 - F_X - (k_{X_{\text{тян}}} R_{\Sigma}^0 + F_X) \frac{k_{X_{\text{тол}}} r_Y + k_{Y_{\text{тол}}} r_X}{k_{X_{\text{тян}}} r_Y + k_{Y_{\text{тян}}} r_X}}{4(k_{X_{\text{тол}}} + k_{X_{\text{тян}}})}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Подобный подход позволяет получать значения управляющих СТ  $R_1 \dots R_8$  и для вариантов движения, не совпадающих с направлением осей  $Y$  и  $Z$ . Так, для расчета максимальной силы, действующей под углом  $\alpha$  относительно оси  $Y$  в положительном направлении отсчета момента  $M_X$ , в задаче (26) достаточно поменять второе условие на условие  $\frac{F_Z}{F_Y} = \text{tg } \alpha$ .

Решая задачи (26) и (27) для различных наборов значений  $F_X$ , можно получить, что в общем случае зависимость  $F_X (F_Y, F_Z)$  представляет собой некоторую поверхность в системе координат  $(X, Y, Z)$ , примерный вид которой показан на рис. 9.

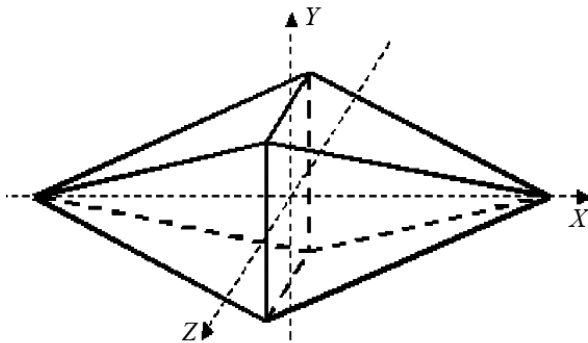


Рис. 9. Вид зависимости  $F_X(F_Y, F_Z)$  в системе координат  $(X, Y, Z)$

По значениям элементарных СТ рассчитаем КС, подаваемые на ОУ. Сила тяги каждого сопла прямо пропорциональна площади критического сечения:

$$R_i = K_R P_K \mu F_i, \quad (32)$$

где  $P_K$  — давление в камере сгорания ДУ;  $K_R$  — постоянная величина при заданном уровне давления. Площади критического сечения  $i$ -го сопла  $\mu F_i$ , в свою очередь, соответствует определенное программное значение КС:

$$\mu F_i = \mu F_0 + K_{\mu F} \cdot \delta_{пр i}, \quad (33)$$

где  $\mu F_0$  и  $K_{\mu F}$  — константы, определяемые конструкцией ОУ. В итоге получаем простую формулу связи КС и СТ каждого сопла:

$$\delta_{пр i} = \frac{1}{K_{\mu F}} \left( \frac{R_i}{K_R P_K} - \mu F_0 \right). \quad (34)$$

Таким образом, приведенный подход к исследованию возможностей реализации ДС поступательного движения в боковых направлениях позволяет не только оценить максимальные реализуемые изделием величины поперечных боковых сил, но и задавать требуемое движение ДС непосредственным расчетом сил тяги (30), (31) и КС (34) для каждого из органов управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Разоренов Г. Н., Бахрамов Э. А., Титов Ю. Ф. Системы управления летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 2003.
2. Арнс В. Д., Федоров С. М., Хитрик М. С., Лучко С. В. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. — М.: Машиностроение, 1976.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.

Статья поступила в редакцию 3.03.2006