

УДК 534.113

А. М. Г у с ь к о в, С. А. В о р о н о в,  
А. С. К в а ш н и н**ВЛИЯНИЕ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
НА ПРОЦЕСС ВИБРОСВЕРЛЕНИЯ**

*Исследовано влияние крутильных колебаний инструмента на процесс вибросверления. Получены уравнения образования поверхностей. Для процесса сверления с непрерывной стружкой проведен анализ устойчивости, и построены границы областей динамической устойчивости в аналитическом виде. Методом установления получены области динамической устойчивости и бифуркационные диаграммы для процесса без внешнего возбуждения, по которым были выявлены параметры и их соотношения, значимость которых наиболее существенна при выборе модели.*

Особенностью сверления глубоких отверстий малого диаметра является затруднительное удаление стружки из зоны резания. Вынос стружки существенно облегчается, если стружка получается достаточно мелкой. Существуют различные методы дробления стружки [1, 2]. Наиболее эффективным является вибрационное сверление, при котором в зоне крепления сверла возбуждаются осевые вибрации требуемой частоты и амплитуды. Тогда при правильном подборе значений рабочей частоты и амплитуды вибратора продольные колебания инструмента (а следовательно, и режущих кромок) позволяют получать дробленую стружку.

В работе [3] был предложен метод авторезонансного сверления, основанный на явлении возникновения автоколебаний во время процесса обработки резанием. Разработанная методика требует детального изучения динамики инструмента и формирования стружки в процессе резания. Эти исследования были проведены в России около десяти лет назад, а построенные модели и некоторые результаты анализа по ним используются до сих пор, в том числе в работах [4–6]. Наибольшее внимание в большинстве работ по динамике вибросверления уделено моделированию продольных колебаний инструмента, так как именно продольные перемещения определяют формирование стружки, срезаемой режущими кромками. В действительности же инструмент нагружен помимо продольной силы резания еще и крутящим моментом, из-за которого могут появляться и крутильные колебания.

Модель, приведенная в статье [7], включает в себя сосредоточенную осевую силу резания и сосредоточенный закручивающий момент

резания как силовые факторы, воздействующие на сверло со стороны обрабатываемого материала. Спиральное сверло здесь считалось естественно закрученным стержнем. Предполагалось, что крутящий момент резания, действующий против направления “закрученности” сверла, распрямляет его, при этом сверло естественным образом удлиняется в осевом направлении. Аналогичным образом силы резания были представлены в работе [8], где учтено, что для прямых естественно закрученных стержней в линейном приближении имеется связь между углом поворота сечений вокруг оси стержня и осевым перемещением. Волнистость же дна отверстия вызвана связанными продольными и крутильными колебаниями сверла. Основной причиной самовозбуждения вибраций является регенерация колебаний за счет резания по следу.

По упомянутым работам можно сделать вывод, что динамика процесса резания не является результатом вынужденных колебаний от внешней нагрузки (сил резания), а представляет собой автоколебательный процесс, который может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В работе [4] автор исследовал устойчивость продольных автоколебаний сверла при непрерывном резании; принималась полиномиальная (кубическая) зависимость осевой силы резания от толщины стружки. Области устойчивости процесса сверления для продольных колебаний инструмента были получены асимптотическим методом. Исследования были продолжены с включением в динамическую модель уравнений образования новых поверхностей из работ [6, 9], что позволило смоделировать нестационарные режимы, включая моменты входа–выхода режущих кромок инструмента из обрабатываемого материала. Явление синхронизации колебаний инструмента на частоте внешнего источника колебаний (вибратора) для случая вибросверления было рассмотрено в работах [5, 9].

Статья [10] посвящена математическому описанию процесса ортогонального резания с распределением силы резания по кромке резца. При этом рассматривалась система с одной степенью свободы (осевой). В результате автор смог получить области устойчивости и бифуркационные диаграммы для построенной модели, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В публикации [11] процесс вибросверления смоделирован как система с двумя степенями свободы (осевой и крутильной). В основные уравнения модели входят величины, описывающие геометрию режущих кромок. Модель, приведенная в работе [9], так же как и модель из работы [11] может быть использована для непрерывного резания и для сверления с выходом инструмента из металла в процессе обработки заготовки. Целью работы [11] является компьютерное моделирование поверхности, получаемой при обработке, и сравнение результатов работы построенной модели с экспериментальными данными. В отличие

от настоящей работы, в статье [11] в качестве независимой переменной при интегрировании полной системы уравнений выбрано время, что при учете крутильных колебаний требует дополнительной интерполяции в ходе интегрирования. Таким образом, в ходе интегрирования может появляться некоторая погрешность интерполирования.

В настоящей работе поставлена цель — исследовать влияние крутильных колебаний инструмента, возникающих при выходе инструмента из материала в процессе вибросверления, на его осевые колебания.

**Постановка задачи.** При сверлении глубоких отверстий инструментом, имеющим конечные осевую и крутильную жесткости крепления, режущие кромки инструмента могут совершать как продольные, так и крутильные колебательные движения. Ставится задача — исследовать влияние крутильных колебаний на процесс вибросверления.

Разработке моделей процесса сверления посвящено много исследований, в которых изучались различные расчетные схемы упругой системы станок–приспособление–инструмент–деталь. Этому уделяется значительное внимание, поскольку принятие той или иной расчетной схемы, в конечном счете, определяет результаты исследования. На основе имеющихся данных об экспериментальных виброустройствах можно сделать вывод, что основным звеном, определяющим крутильную жесткость упругой системы и непосредственно связывающим инструмент, работающий в глубоком отверстии, со станком, является стембель сверла. Вследствие весьма большой длины и малого диаметра стембель сверла является наименее жестким элементом всей технологической системы. При определенных условиях влияние крутильных колебаний на процесс образования стружки становится существенным. В связи с этим, в настоящей работе рассматривается динамика сверла как системы с двумя степенями свободы.

**Описание модели.** *Модель инструмента.* Принципиальная схема процесса вибрационного сверления с осевой податливостью крепления инструмента приведена на рис. 1.

Модель инструмента представляется как система с двумя степенями свободы (осевой и крутильной). Расчетная схема принятой модели представлена на рис. 2. Здесь сам инструмент и его крепление имеют конечные осевую и крутильную жесткости, которые в принятой расчетной схеме участвуют как некоторые приведенные жесткости  $k_{ax}$  и  $k_{rot}$ .

В соответствии с расчетной схемой модели (рис. 2) сам инструмент и его крепление имеют конечные осевую и крутильную жесткости, которые в принятой расчетной схеме участвуют как некоторые приведенные жесткости  $k_{ax}$  и  $k_{rot}$ . При этом вибратор задает движение левому сечению крепления инструмента по закону  $\ddot{Z}_0(t) = \ddot{A}_0 \sin(\omega_0 t)$ , где

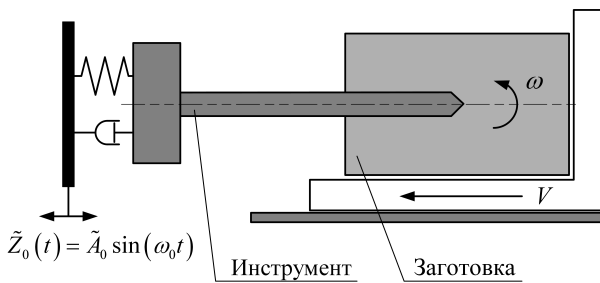


Рис. 1. Принципиальная схема процесса вибрационного сверления с осевой податливостью крепления инструмента

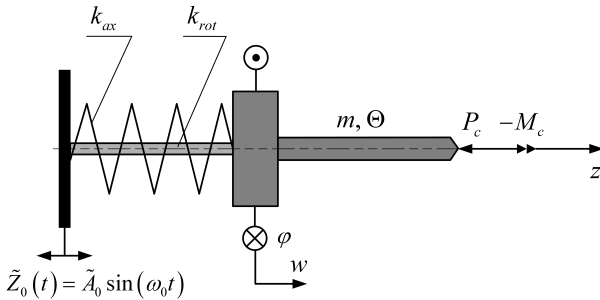


Рис. 2. Расчетная схема инструмента

$\tilde{A}_0$  — амплитуда вибраций;  $\omega_0$  — круговая частота задаваемых вибраций. К правому сечению стебля сверла приложены сосредоточенные сила и момент, возникающие непосредственно при внедрении режущих кромок инструмента в материал заготовки. Рассеивание энергии колебаний, как крутильных, так и осевых, учитывается введением соответствующих демпфирующих элементов. Для крутильных колебаний в качестве условий закрепления левого сечения инструмента принимается заделка. Уравнения движения инструмента для принятой расчетной схемы имеют вид

$$m\ddot{w} + d_{ax}\dot{w} + k_{ax}w + c_w\psi = -m\ddot{Z}_0 - P_c; \quad (1)$$

$$\Theta\ddot{\varphi} + d_{rot}\dot{\varphi} + k_{rot}\varphi + c_\varphi w = -M_c;$$

здесь  $m, \Theta$  — масса и физический момент инерции (приведенный к правому сечению упругого стержня, работающего на кручение) инструмента;  $w, \varphi$  — осевое смещение и угол поворота вокруг оси сверла;  $d_{ax}, d_{rot}$  — коэффициенты демпфирования для осевых и крутильных колебаний;  $k_{ax}, k_{rot}$  — осевая и крутильная жесткости;  $c_w, c_\varphi$  — коэффициенты связи между продольным перемещением  $w$  и углом поворота правого сечения сверла  $\varphi$ ;  $P_c, M_c$  — сила и момент резания. Точками обозначены производные по времени  $t$ .

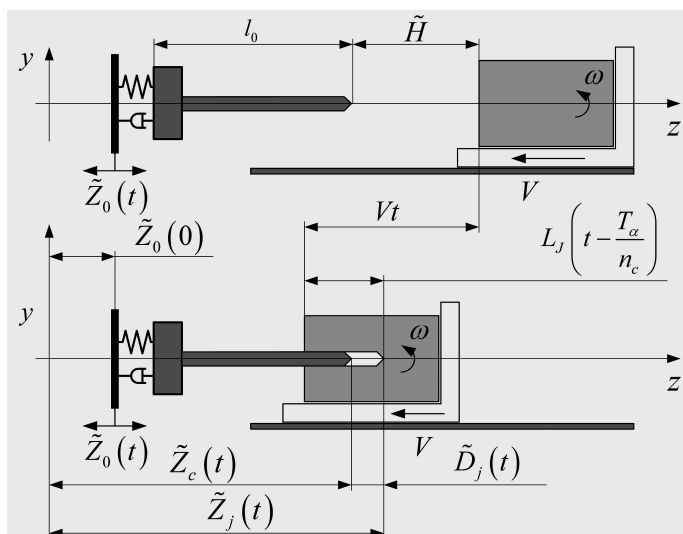
Предположим, что деталь и инструмент являются недеформируемыми твердыми телами, податливым является только крепление инструмента. Рассмотрим инструмент с  $n_c$  симметрично расположенными по торцу режущими кромками. Деталь вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и перемещается с постоянной скоростью осевой подачи  $V$  (см. рис. 1). Номинальная подача на оборот определяется как  $h_0 = VT$ , где  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

*Модель формирования поверхности.* Для описания процесса получения обработанной поверхности используем в динамической модели (рис. 3) так называемые уравнения образования новых поверхностей [6, 9]. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$D_j(t) = \left[ \tilde{Z}_0(t) - \tilde{Z}_0(0) \right] + w(t) - \tilde{H} + Vt - L_J \left( t - \frac{T_\alpha}{n_c} \right); \quad (2)$$

$$h_j(t) = \max(0, D_j(t)),$$

где  $D_j(t)$  — расстояния от  $j$ -й режущей кромки до необработанной поверхности;  $\tilde{H}$  — расстояние от инструмента до средней поверхности торца детали в начальный момент времени;  $L_J$  — отклонение поверхности торца от плоскости под  $j$ -й режущей кромкой;  $T_\alpha$  — переменное время запаздывания. Второе соотношение в выражении (2) определяет толщину снимаемого слоя  $h_j(t)$ . При этом поверхность  $L_j(t)$  формируется за счет снятия мгновенной толщины слоя  $h_j(t)$  с поверхности, сформированной “предыдущей” режущей кромкой



**Рис. 3. Модель формирования поверхности**

в момент  $\left(t - \frac{T_\alpha}{n_c}\right)$ :

$$L_j(t) = L_J \left(t - \frac{T_\alpha}{n_c}\right) + h_j(t). \quad (3)$$

Для проведения вычислений перейдем к безразмерным величинам, отнеся все линейные размеры к  $h_0$ . В качестве масштаба времени возьмем время одного оборота детали  $T$ , а также введем обозначение  $\omega_0 T = 2\pi p$ , где  $p$  — количество колебаний инструмента, сообщаемых вибратором, за время одного оборота детали. Используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{w}{h_0}, \quad \psi = \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \zeta = \frac{d_{ax}}{2\sqrt{k_{ax}m}}, \quad f_{ax} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{ax}}{m}}, \quad f_{rot} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{rot}}{\Theta}}, \\ Z_0 &= \frac{\tilde{Z}_0}{h_0}, \quad A_0 = \frac{\tilde{A}_0}{h_0}, \quad H = \frac{\tilde{H}}{h_0}, \\ c_\xi &= \left[\frac{2\pi T^2}{h_0 m}\right] c_w, \quad c_\psi = \left[\frac{h_0 T^2}{2\pi \Theta}\right] c_\varphi, \quad \mu_\zeta = \frac{m}{\Theta} \frac{d_{rot}}{d_{ax}} f_{ax}^2, \end{aligned}$$

где  $f_{ax}$  и  $f_{rot}$  — безразмерные собственные частоты осевых и крутильных колебаний инструмента. Уравнения кинематики процесса вибрационного сверления в безразмерной форме принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_j(\tau) &= [Z_0(\tau) - Z_0(0)] + \xi(\tau) - H + \tau - \Lambda_J \left(\tau - \frac{T_\alpha/T}{n_c}\right); \\ \eta_j(\tau) &= \max(0, \Delta_j(\tau)); \\ \Lambda_j(\tau) &= \Lambda_J \left(\tau - \frac{T_\alpha/T}{n_c}\right) + \eta_j(\tau); \\ \Lambda_j(\tau) &= \Lambda_{0j}(\tau), \tau \leq 0, \quad J = (j - 1) + n_c \cdot \text{fix} \left(\frac{1}{j}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\text{fix} \left(\frac{1}{j}\right)$  — функция, дающая значение единицы при  $j = 1$ , или 0, когда  $j$  — любое другое число.

*Модель сил резания.* Для описания осевой силы резания (см. рис. 2) воспользуемся представлением [6, 9]:

$$P_c = \left(\frac{k_c^0 h_0}{q}\right) \bar{\eta}^q, \quad (5)$$

где  $k_c^0 = g\sigma Rq \left(\frac{h_0}{n_c R}\right)^{q-1}$  — статическая жесткость резания;  $g$  — постоянная формы режущей кромки,  $g \sim 1$ ;  $\sigma$  — характерное напряжение обрабатываемого материала;  $R$  — радиус сверла;  $q$  — параметр нели-

нейности закона резания;  $\bar{\eta}$  — приведенная толщина снимаемого слоя,

$$\bar{\eta} = \left[ \frac{1}{n_c} \sum_{j=1}^n (n_c \eta_j)^q \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (6)$$

Закручивающий сверло момент  $M_c$  представим как произведение окружной силы резания  $P_t$  на некоторое плечо  $l_t$ , составляющее долю радиуса просверливаемого отверстия (в общем случае  $0 < l_t \leq R$ ). При этом само значение окружной силы резания примем как произведение некоторого коэффициента на значение осевой силы резания  $P_t = \mu_P P_c$ .

Таким образом, уравнения движения инструмента для выбранной динамической модели без учета выхода инструмента из материала заготовки примут вид (точками здесь обозначены производные разных порядков по безразмерному времени  $\tau$ )

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\zeta (2\pi f_{ax}) \dot{\xi} + (2\pi f_{ax})^2 \xi + c_\xi \psi &= \\ &= (2\pi p)^2 A_0 \sin(2\pi p\tau) - (2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \bar{\eta}^q; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{\psi} + \mu_\zeta 2\zeta (2\pi f_{ax}) \dot{\psi} + (2\pi f_{rot})^2 \psi + c_\psi \xi = -\mu_P (2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \bar{\eta}^q,$$

где  $\kappa = \frac{k_c^0}{k_{ax}}$  — безразмерная жесткость резания.

При этом будем считать, что безразмерный коэффициент трения для крутильных колебаний равен  $\mu_\zeta 2\zeta (2\pi f_{ax})$ , где  $\mu_\zeta$  — масштабирующий множитель.

**Исследование устойчивости процесса резания с непрерывной стружкой.** В качестве невозмущенного движения рассмотрим случай резания с постоянной толщиной снимаемого слоя без внешнего возбуждения [9].

Тогда  $\xi^0(\tau) \equiv \text{const}$ ,  $\psi^0(\tau) \equiv \text{const}$ ,  $\bar{\eta}^0(\tau) = 1$  и из уравнений (7) определяем

$$\begin{aligned} \xi^0 &= - (2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \left[ \frac{\mu_P c_\xi - (2\pi f_{rot})^2}{c_\xi c_\psi - (4\pi^2 f_{ax} f_{rot})^2} \right]; \\ \psi^0 &= - (2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \left[ \frac{c_\psi - (2\pi f_{ax})^2 \mu_P}{c_\xi c_\psi - (4\pi^2 f_{ax} f_{rot})^2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим возмущенное движение как  $\xi(\tau) = \xi^0 + \delta\xi(\tau)$ ,  $\psi(\tau) = \psi^0 + \delta\psi(\tau)$ ,  $\bar{\eta}(\tau) = \bar{\eta}^0 + n_c \left[ \delta\xi(\tau) - \delta\xi \left( \tau - \frac{1}{n_c} \right) \right]$  и линеаризуем уравнения движения (7) по  $\delta\xi$ ,  $\delta\psi$  около невозмущенного движения:

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\xi}(\tau) + 4\pi\zeta f_{ax}\delta\dot{\xi}(\tau) + 4\pi^2 f_{ax}^2 (\xi^0 + \delta\xi(\tau)) + c_\xi (\psi^0 + \delta\psi(\tau)) = \\ = -4\pi^2 f_{ax}^2 \frac{\kappa}{q} \left[ 1 + qn_c \left( \delta\xi(\tau) - \delta\xi \left( \tau - \frac{1}{n_c} \right) \right) \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\psi}(\tau) + \mu_\zeta 4\pi\zeta f_{ax}\delta\dot{\psi}(\tau) + 4\pi^2 f_{rot}^2 (\psi^0 + \delta\psi(\tau)) + c_\psi (\xi^0 + \delta\xi(\tau)) = \\ = -\mu_P 4\pi^2 f_{ax}^2 \frac{\kappa}{q} \left[ 1 + qn_c \left( \delta\xi(\tau) - \delta\xi \left( \tau - \frac{1}{n_c} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнений (9) можно искать в виде

$$\delta\xi(\tau) = C_1 \exp(2\pi n_c \lambda \tau);$$

$$\delta\psi(\tau) = C_2 \exp(2\pi n_c \lambda \tau).$$

Введем обозначения  $F_{ax} = \frac{f_{ax}}{n_c}$ ,  $F_{rot} = \frac{f_{rot}}{n_c}$ ,  $K = \kappa n_c$ . При подстановке выбранного вида решений получим следующее уравнение для определения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (10)$$

где

$$G_{11} = \lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{ax}^2 [1 + K - K \exp(-2\pi\lambda)];$$

$$G_{12} = c_\xi;$$

$$G_{21} = c_\psi + \mu_P F_{ax}^2 [K - K \exp(-2\pi\lambda)];$$

$$G_{22} = \lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{rot}^2.$$

Равенство нулю левой части уравнения (10) соблюдается при выполнении условия  $\det[G] = 0$ , т.е.

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{ax}^2 [1 + K - K \exp(-2\pi\lambda)]) (\lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{rot}^2) = \\ = c_\xi (c_\psi + \mu_P F_{ax}^2 [K - K \exp(-2\pi\lambda)]), \end{aligned}$$

откуда получаем следующую совокупность при  $c_\xi = c_\psi = 0$ :

$$\begin{cases} \lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{ax}^2 [1 + K - K \exp(-2\pi\lambda)] = 0; \\ \lambda^2 + 2\zeta F_{ax}\lambda + F_{rot}^2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим сразу, что в данной системе невозможна дивергентная форма потери устойчивости процесса непрерывного резания, так как  $F_{ax}^2 \neq 0$ ,  $F_{rot}^2 \neq 0$ . Здесь речь может идти только о динамической бифуркации — бифуркации Пуанкаре–Андронов–Хопфа. При переходе через критические значения параметров возникают автоколебания,



имеющие здесь вид прерывистого резания. В общем случае уравнение  $\det[G] = 0$  имеет бесконечное число комплексных корней, значения которых зависят от *четырёх* физических констант  $\{F_{ax}, F_{rot}, K, \zeta\}$ . То, что количество режущих кромок не входит в явном виде, говорит о том, что решение уравнения  $\det[G] = 0$  является универсальным (автомодельным) для любого числа кромок. Следует сразу отметить, что при выбранной расчетной схеме инструмента зоны динамической устойчивости процесса сверления с непрерывной стружкой совпадают с аналогичными зонами для системы с одной степенью свободы (здесь и далее подразумевается модель без учета крутильных колебаний, аналогичная модели, приведенной в работе [9]), так как второе уравнение в совокупности (11) будет давать только корни с отрицательной действительной частью (в силу критерия Раусса–Гурвица), а следовательно, только устойчивые решения, при любых физических параметрах системы. На границе же областей устойчивости корни являются чисто мнимыми:  $\lambda = is$ , и после подстановки в первое уравнение (11) и разделения действительной и мнимой частей получаем два уравнения, позволяющие определить любые две константы в функции от частоты  $s$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(G_{11}) : -s^2 + F_{ax}^2 (1 + K - K \cos(2\pi s)) &= 0; \\ \operatorname{Im}(G_{11}) : 2\zeta F_{ax} s + F_{ax}^2 K \sin 2\pi s &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) задают неявно кривые на плоскости  $\{F_{ax}, K\}$  в параметрическом виде  $\{F_{ax}(s; \zeta), K(s; \zeta)\}$ . Учитывая, что константы  $\{F_{ax}, K, \zeta\}$  положительные числа, из второго уравнения системы (12) следует существование бесконечного числа ветвей

$$S_j = \{F_{ax}(s; \zeta), K(s; \zeta) | s \in (j - \frac{1}{2}; j), j = 1, 2, 3, \dots\}. \quad (13)$$

Система (13) может иметь максимум четыре действительных корня. Этот результат можно получить, исключив тригонометрические функции

$$(s^2 - F_{ax}^2)^2 - 2F_{ax}^2 (s^2 - F_{ax}^2) (K - 2\zeta^2) + 2\zeta^2 F_{ax}^4 = 0.$$

Откуда получаем

$$s^2 = F_{ax}^2 \left[ 1 + K - 2\zeta^2 \pm \sqrt{(K - 2\zeta^2)^2 - 4\zeta^2} \right].$$

Для существования действительных решений необходимо, чтобы

$$K \geq 2\zeta(1 + \zeta) = K_*. \quad (14)$$

Этот результат означает, что в рассматриваемой динамической системе при невыполнении неравенства (14), т.е. при  $n_c \frac{k_c^0}{k_{ax}} < 2\zeta(1 + \zeta)$ ,

невозможна потеря устойчивости непрерывного процесса резания. Физически понятно, что при достаточно жестком креплении инструмента —  $k_{ax} \rightarrow \infty$ , т.е. энергии, поступающей от процесса резания, недостаточно, чтобы возбудить систему. Внешнее трение увеличивает порог возбуждения автоколебаний. Соответствующие критическому значению параметра (14) значения частоты  $s$  и параметра  $F_{ax}$  определяются из уравнений (12) как

$$\operatorname{tg}(2\pi s_*) = \frac{-\sqrt{1+2\zeta}}{\zeta} \text{ и } F_{ax*} = \frac{s_*}{\sqrt{1+2\zeta}}.$$

Параметрическое представление решения системы (12) имеет вид

$$K(s; \zeta) = 2\zeta [S\Phi(s; \zeta)]^{-1}; \quad F_{ax}(s; \zeta) = -s\Phi(s; \zeta);$$

$$C = \cos(2\pi s); \quad S = \sin(2\pi s); \tag{15}$$

$$\Phi(s; \zeta) = S \left[ (1-C)\zeta + \sqrt{(1-C)^2\zeta^2 + S^2} \right]^{-1}.$$

Из уравнений (15) следует, что имеется возможность выделить универсальные периодические функции

$$K(s; \zeta) = K(s+1; \zeta), \quad \frac{F_{ax}(s; \zeta)}{s} = \frac{F_{ax}(s+1; \zeta)}{(s+1)},$$

которые позволяют представить информацию о границах областей неустойчивости в единой форме для всех зон (13), т.е. достаточно рассмотреть один интервал  $I_s = \left\{ \frac{1}{2} < s < 1 \right\}$  (рис. 4). Из графиков видно, что при  $K > K_*$  (внутри заштрихованной зоны, см. рис. 4, б) процесс непрерывного резания неустойчив. Существует наименьшая скорость резания (правая полуветвь границы зоны динамической неустойчивости), при превышении которой процесс непрерывного резания ста-

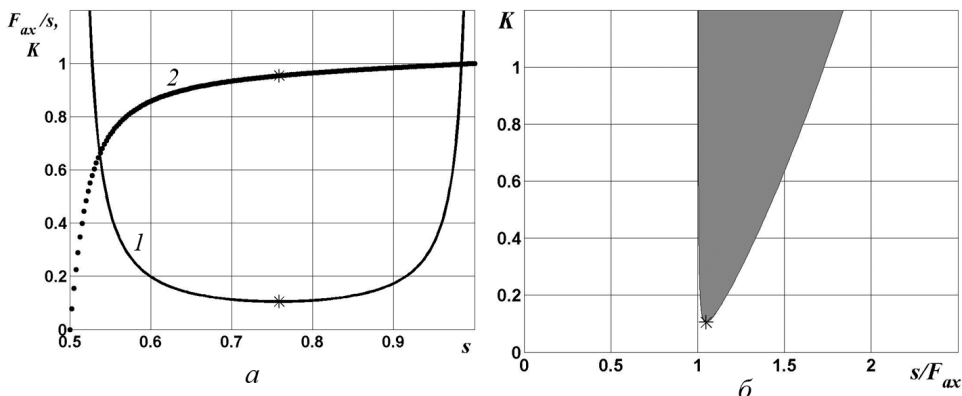


Рис. 4. Границы областей устойчивости: 1 —  $K$ , 2 —  $\frac{F_{ax}}{s}$ .

билизируется. Расчеты проведены для коэффициента демпфирования  $\zeta = 0,05$  при следующих критических значениях параметров:

$$K_* = 0,1050; \frac{F_{ax*j}}{s_{*j}} = 0,9535;$$

$$s_{*j} = -0,2424 + j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Приведенные графики имеют определенную общность, так как комплексы  $\{F, K\}$  зависят от большого числа физических параметров:

$$F_{ax} = \frac{R}{n_c V_c} \sqrt{\frac{k_{ax}}{m}}, \quad K = \frac{n_c g \sigma R q \left( \frac{h_0}{n_c R} \right)^{q-1}}{k_{ax}},$$

где  $V_c = \frac{2\pi R}{T}$  — скорость резания. Найденные универсальные периодические функции позволяют для заданной технологической системы  $\{\zeta, f_{ax}, \kappa, n_c\}$  определить устойчивость процесса непрерывного резания. Сначала вычисляется корень  $\tilde{s}$  функции  $\left( F_{ax}(s; \zeta) - \frac{f_{ax}}{n_c} \right)$ , при этом ищется  $\tilde{s}$  последовательно в интервалах (13). Далее вычисляется величина  $\tilde{\kappa} = \frac{K(\tilde{s}; \zeta)}{n_c}$ ; если  $\tilde{\kappa} < \kappa_*$ , то процесс непрерывного резания неустойчив.

Осевая податливость инструмента может быть вызвана либо специально спроектированным встроенным упругим элементом, либо неконтролируемой жесткостью технологической системы. Условие (14) позволяет разделить технологические системы на *жесткие* (несамовозбуждаемые  $K < K_*$ ) и на *мягкие* (самовозбуждаемые  $K > K_*$ ).

**Нелинейная модель. Численный анализ.** В системах уравнений (4) и (7) время  $\tau$  — независимая переменная. При численном интегрировании по времени систем, в которых возможны как продольные, так и крутильные колебания, возникает необходимость проводить интерполяцию решения между точками решения в моменты времени  $\tau_i$  и  $\tau_{i+1}$  (так как запаздывание не постоянно, а является функцией угла закручивания). Интерполяции на каждом шаге интегрирования можно избежать, если перейти к новой независимой переменной — полному углу поворота. (Численное интегрирование уравнений модели по времени реализовано в работе [11]).

Для полного угла  $\alpha$  поворота инструмента относительно детали в каждый момент времени выполняется равенство

$$\alpha(t) = \omega t + \varphi(t),$$

тогда для производной имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega + \frac{d\varphi}{dt}$$

или при  $\tau = \frac{t}{T}$ ,  $\beta = \frac{\alpha}{2\pi}$ ,  $\psi = \frac{\varphi}{2\pi}$ ,  $T\omega = 2\pi$

$$\frac{d\beta}{d\tau} = 1 + \frac{d\psi}{d\tau}.$$

Далее будем считать угол поворота  $\beta$  независимой переменной, т.е. время становится зависимой переменной, для которой можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\Psi(\beta) = \frac{d\tau}{d\beta} = 1 - \frac{d\psi}{d\beta}.$$

При этом система (7) преобразуется к системе вида

$$\begin{bmatrix} \bar{y}(\beta) \\ \tau(\beta) \end{bmatrix}' = \Psi(\beta) \left( [\hat{A}] \begin{bmatrix} \bar{y}(\beta) \\ 1 \end{bmatrix} + [\hat{B}] \bar{b}_\eta(\beta) \right) \quad (16)$$

(здесь штрихом обозначена производная по углу поворота  $\beta$ ), где  $[\bar{y}(\beta) \tau(\beta)]^T = [y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]^T = [\xi(\beta) \psi(\beta) \xi'(\beta) \psi'(\beta) \tau(\beta)]$  — вектор состояния системы, и принимаются следующие обозначения:

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(2\pi f_{ax})^2 & c_\xi & -2\zeta(2\pi f_{ax}) & 0 & 0 \\ c_\psi & -(2\pi f_{rot})^2 & 0 & -\mu_\zeta \cdot 2\zeta(2\pi f_{ax}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}(\beta) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad [\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (2\pi p)^2 A_0 & -(2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \\ 0 & -\mu_P (2\pi f_{ax})^2 \frac{\kappa}{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b}_\eta(\beta) = \begin{bmatrix} \sin(2\pi p \tau(\beta)) \\ \bar{\eta}^q \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения образования новых поверхностей с переменным запаздыванием по времени с учетом продольных колебаний преобразуются в уравнения с постоянным запаздыванием по углу поворота детали относительно инструмента:

$$\Delta_j(\beta) = [Z_0(y_5(\beta)) - Z_0(y_5(0))] + y_1(\beta) - H + y_5(\beta) - \Lambda_J \left( \beta - \frac{1}{n_c} \right);$$

$$\eta_j(\beta) = \max(0, \Delta_j(\beta));$$

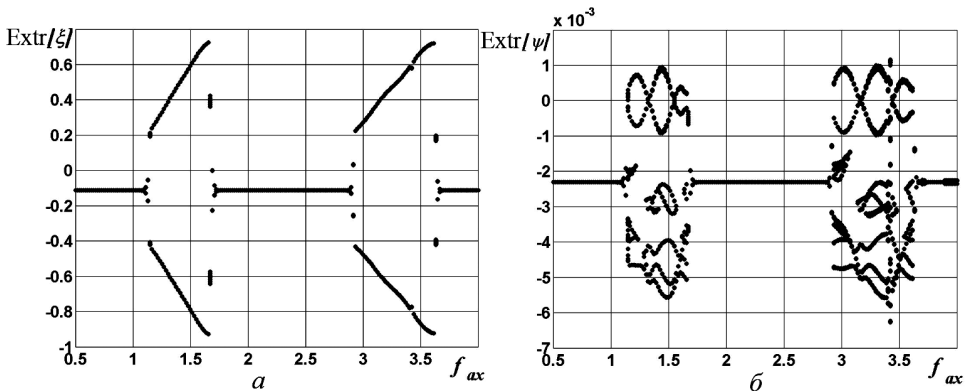
$$\Lambda_j(\beta) = \Lambda_J \left( \beta - \frac{1}{n_c} \right) + \eta_j(\beta);$$

$$\Lambda_j(\beta) = \Lambda_{0j}(\beta), \quad \beta \leq 0, \quad J = (j - 1) + n_c \text{fix} \left( \frac{1}{j} \right). \quad (17)$$

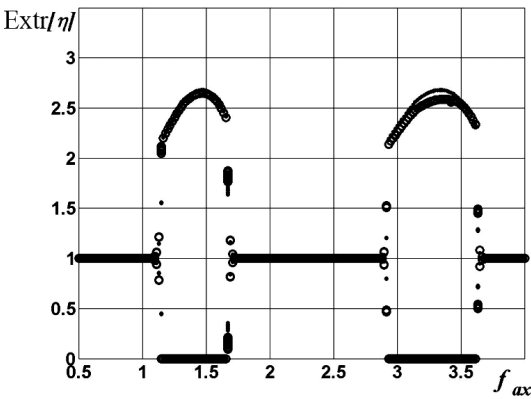
Таким образом, выбранная модель полностью описывается полученной системой дифференциально-алгебраических уравнений (16) и (17) с постоянным запаздыванием. Такие системы удобно интегрировать методом Эйлера–Коши с постоянным шагом и итерациями. При численном решении систем (16) и (17) принимались следующие неизменяемые значения параметров:  $n_c = 2$ ,  $q = 0,75$ ,  $\mu_P = 1$ ,  $\mu_\zeta = 1$ ,  $c_\xi = 0$ ,  $c_\psi = 0$ ,  $H = 0$ .

Для наглядного представления многообразия различных движений технологической системы наиболее адекватным методом является использование отображения Пуанкаре в виде последовательности экстремумов положения инструмента ( $\text{Extr}[\xi]$ ) или приведенной толщины снимаемого слоя ( $\text{Extr}[\bar{\eta}]$ ). При этом на диаграмме для каждого значения параметра показываются все экстремумы отображаемой функции, попавшие в интервал наблюдения.

**Автоколебания системы.** В системах, подобных рассматриваемой в настоящей работе, при некоторых значениях параметров возможно появление автоколебаний. На рис. 5 приведены отображения Пуанкаре для осевого смещения  $\xi$  и угла закручивания  $\psi$  в зависимости от собственной частоты продольных колебаний инструмента  $f_{ax}$  для системы



**Рис. 5. Отображения Пуанкаре для осевых колебаний  $\xi$  (а) и крутильных колебаний  $\psi$  (б) при различных значениях  $f_{ax}$  для системы с двумя степенями свободы**



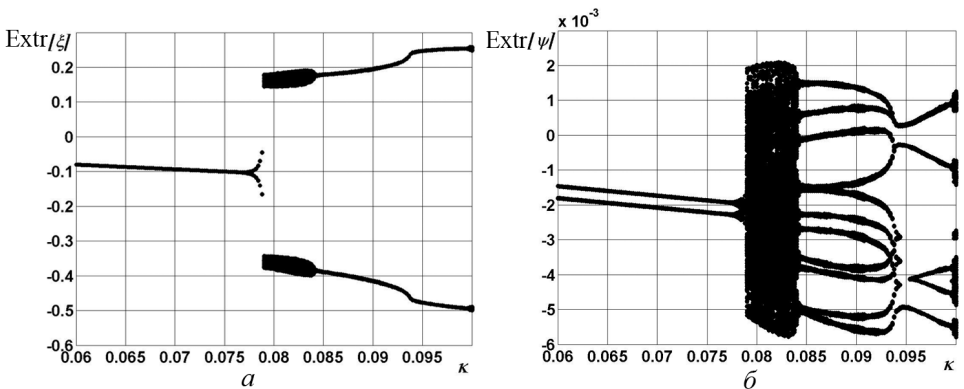
**Рис. 6. Отображения Пуанкаре для приведенной толщины срезаемого слоя  $\bar{\eta}$  при различных значениях  $f_{ax}$ :**

● — для системы с одной и ○ — с двумя степенями свободы

инструмента из материала, чередуются с зонами непрерывного резания. Также заметно влияние крутильных колебаний на амплитуду продольных движений инструмента.

Подобным же образом получены диаграммы на рис. 7, 8, но здесь в качестве изменяемого параметра выбиралась относительная жесткость резания  $\kappa$ . Значения параметров следующие:  $f_{ax} = 2,7$ ,  $\zeta = 0,02$ ,  $\frac{f_{rot}}{f_{ax}} = 7$ .

По данным рисункам следует отметить наличие в обеих системах так называемого порогового значения  $\kappa$ , при котором в системе появляются колебания с выходом режущих кромок инструмента из материала заготовки. Как и в случае с рис. 6, заметно влияние крутильных колебаний на амплитуду продольных движений инструмента.

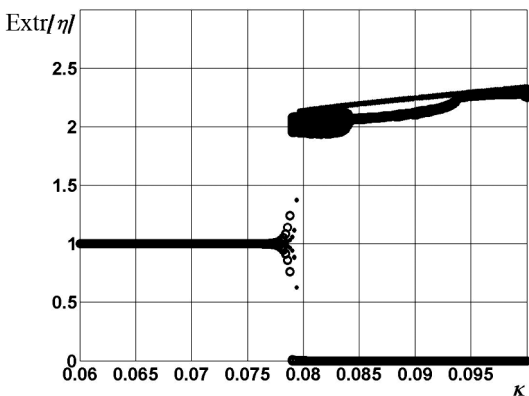


**Рис. 7. Отображения Пуанкаре для осевых колебаний  $\xi$  (а) и крутильных колебаний  $\psi$  (б) при различных значениях  $\kappa$  для системы с двумя степенями свободы**

Если менять собственную частоту крутильных колебаний, оставляя при этом неизменной собственную частоту осевых колебаний инструмента, то, построив диаграмму Пуанкаре в осях  $\text{Extr}[\eta]$  —  $\frac{f_{rot}}{f_{ax}}$  (см. рис. 9), можно увидеть, что заметное влияние собственной частоты крутильных колебаний имеет место при довольно низких значениях крутильной жесткости  $\left(\frac{f_{rot}}{f_{ax}} < 5\right)$ , а также при значениях  $f_{rot}$ , кратных  $f_{ax}$ . При получении диаграммы на рис. 9 принимались следующие значения параметров:  $\kappa = 8,48 \cdot 10^{-2}$ ,  $f_{ax} = 2,7$ ,  $\zeta = 0,02$ .

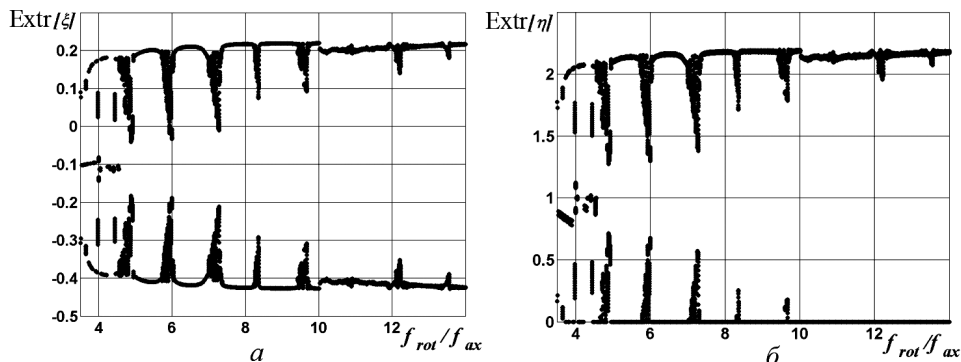
Дальнейшая работа над рассматриваемой проблемой предполагает также следующие этапы: исследование влияния крутильных колебаний инструмента на процесс сверления с внешним источником вибраций; исследование влияния меняющейся геометрии режущей кромки инструмента на динамику процесса вибросверления; исследование влияния технологических параметров на процесс образования боковой поверхности отверстия в целях прогнозирования качества и точности обработки.

**Выводы.** 1. При выбранной расчетной схеме инструмента зоны динамической устойчивости процесса сверления с непрерывной



**Рис. 8.** Отображение Пуанкаре для приведенной толщины срезаемого слоя  $\bar{\eta}$  при различных значениях  $\kappa$ :

● и ○ — см. рис. 6



**Рис. 9.** Влияние отношения собственных частот  $f_{rot}$  и  $f_{ax}$  на автоколебания системы:

$a$  — влияние на  $\xi$ ;  $b$  — влияние на  $\bar{\eta}$

стружкой, полученные в аналитическом виде, совпадают с аналогичными зонами для системы с одной степенью свободы.

2. Зоны динамической устойчивости процесса сверления с непрерывной стружкой, полученные методом установления (рис. 6), при численном интегрировании нелинейной системы уравнений (16), (17) хорошо согласуются с зонами, полученными аналитически для линеаризованной системы.

3. Существенное влияние крутильных колебаний на процесс обработки резанием при отсутствии источника внешнего возбуждения возникает только при кратных значениях, а также при  $\frac{f_{rot}}{f_{ax}} < 5$ .

4. При относительно больших значениях отношения собственных частот двухстепенной модели ( $\frac{f_{rot}}{f_{ax}} > 10$ ) крутильные колебания перестают существенно влиять на процесс обработки резанием, а следовательно, двухстепенная модель может быть заменена одностепенной.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00103.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подураев В. Н. Обработка резанием с вибрациями. – М.: Машиностроение, 1970. – 352 с.
2. Stephenson D. A., Agapiou J. S. Metal Cutting Theory and Practice. – Marcel Decker, New York, 1997.
3. Подураев В. Н., Кибальченко А. В. Технология оборонной промышленности для производства изделий народного потребления. – М.: Росконверсия, 1993. – 528 с.
4. Воронов С. А. Оптимизация процесса вибрационного сверления // Тр. МВТУ им. Н.Э. Баумана. № 332. Динамика и прочность машин, М. – С. 13–25.
5. Gousskov A. M., Voronov S. A., Butzer S. A., Chatter Synchronization in Vibratory Drilling Dynamics. – Acoustics and Simulations / ASME 2000, 68, 2000. – P. 263–270.
6. Batzer S. A., Gousskov A. M., Voronov S. A. Modeling vibratory drilling dynamics, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 123, № 4, 2001. – P. 435–443.
7. Bayly P. V., Metzler S. A., Shaut A. J., Young S. G. Theory of torsional chatter in twist drills: model, stability analysis and composition test. – Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 123, 2002. – P. 552–561.
8. Ema S., Fujii H., Marui E. Whirling vibration in drilling. Part 3: Vibration analysis in drilling workpiece with a pilot hole. – Transactions of the ASME, Journal of engineering for industry, Vol. 110, Nov. 1988. – P. 315–321.
9. Гуськов А. М. Нелинейная динамика вибрационного сверления. Роль уравнений образования новых поверхностей. // Тр. симп. CSDT-2000, СТАНКИН, 2000. – С. 93–101.
10. Stepan G. Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting. – Phil. Trans. R. Soc., 359, 2001. – P. 739–757.



11. R o u k e m a J. C., A l t i n t a s Y. Kinematic model of dynamic drilling process. – Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Anaheim, 2004. – P. 13–20.

Статья поступила в редакцию 20.03.2006

Александр Михайлович Гуськов родился в 1948 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1972 г. Д-р техн наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области динамики и механики технологических процессов.

A.M. Guskov (b. 1948) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1972. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications in the field of dynamics and mechanics of technological processes.



Сергей Александрович Воронов родился в 1953 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1976 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 35 научных работ в области механики технологических процессов.

S.A. Voronov (b. 1953) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1976. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 35 publications in the field of mechanics of technological processes.



Алексей Сергеевич Квашнин родился в 1981 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2005 г. Аспирант кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области динамики технологических процессов.

A.S. Kvashnin (b. 1981) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Post-graduate of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mechanics of technological processes.

