

Н. А. Д а н г

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТАБИЛЬНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОРПУСОВ АНТЕННЫХ РЕФЛЕКТОРОВ

Исследовано влияние анизотропии на изменение геометрических параметров композитного корпуса антенного рефлектора при осесимметричном тепловом воздействии. В качестве метода решения применен метод конечных элементов.

Рассмотрим оболочку вращения, представляющую собой поверхность, полученную вращением образующей вокруг оси. В качестве переменных величин, характеризующих геометрию оболочки вращения, выберем радиус R_1 кривизны дуги меридиана, радиус R_2 и угол θ между нормалью к срединной поверхности и осью симметрии (рис. 1). Радиус R_2 равен расстоянию от срединной поверхности по нормали до точки пересечения с осью симметрии. Все три введенные величины (R_1 , R_2 и θ) являются функциями расположения точки A на поверхности.

Форма срединной поверхности оболочки после деформации называется упругой поверхностью оболочки. Она характеризуется тремя проекциями полного перемещения произвольно взятой точки A (рис. 2) на оси x , y и z ; обозначим эти проекции соответственно через u , v и w .

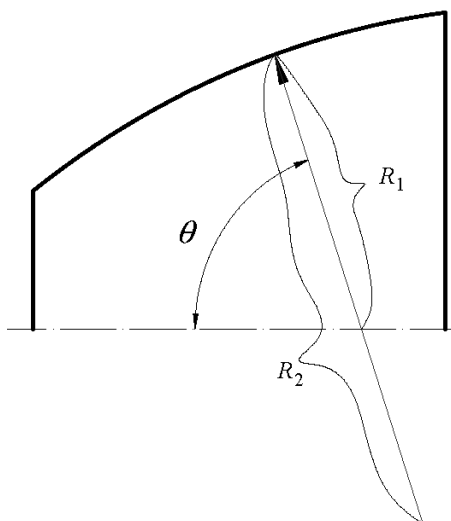


Рис. 1. Геометрические характеристики оболочки вращения

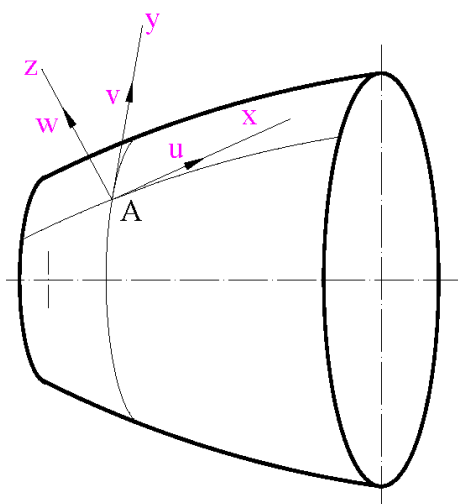


Рис. 2. Связанная система координат и перемещения

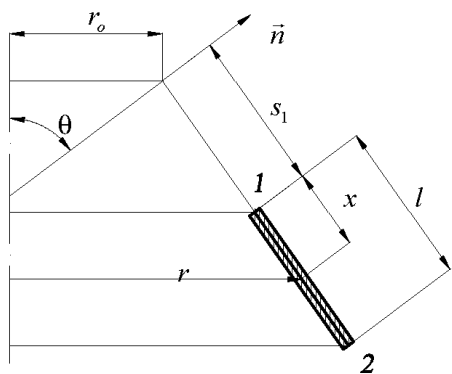


Рис. 3. Координаты отсчета конечно-го элемента

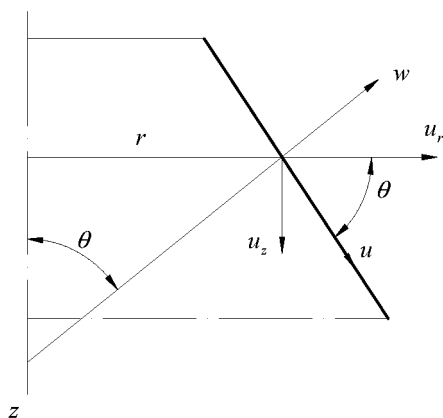


Рис. 4. К определению связи нормальных и касательных перемещений с радиальными и осевыми перемещениями

Оболочки вращения будем набирать конечными элементами (КЭ) конических оболочек (рис. 3). Конические оболочки характеризуются начальным радиусом r_0 параллели и углом θ конусности, отсчитываемым от оси вращения до вектора \vec{n} внешней нормали по ходу часовой стрелки (см. рис. 1 и 3).

Отдельный КЭ конической оболочки (см. рис. 3) определяется нормальными круговыми сечениями 1 и 2. В качестве аргумента в пределах КЭ принимается координата x , отсчитываемая вдоль образующей от первого сечения. Тогда для текущего сечения с аргументом x радиус параллели можно найти по формуле

$$r = r_0 + (s_1 + x) \cos \theta,$$

где s_1 — расстояние вдоль образующей от начальной параллели до параллели первого сечения КЭ.

Осесимметричное деформированное состояние тонкой конической оболочки можно описать полями перемещений, определенных либо в локальной системе координат (ЛСК), либо в глобальной системе координат (ГСК). В качестве перемещений в ЛСК принимаются касательные u , v и нормальные w перемещения (рис. 4).

В качестве перемещений в ГСК принимают радиальные u_r и осевые u_z перемещения (см. рис. 4). Касательные перемещения v (см. рис. 2) одинаковы в ЛСК и ГСК. Перемещения u , w можно вычислить как

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos \theta + u_z \sin \theta; \\ w &= u_r \sin \theta - u_z \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

перемещения u_r , u_z можно вычислить по уравнениям

$$\begin{aligned} u_r &= u \cos \theta + w \sin \theta; \\ u_z &= u \sin \theta - w \cos \theta. \end{aligned}$$

При решении линейной задачи деформации для слоя, отстоящего на расстояние Z от срединной поверхности, можно записать следующие уравнения [1]:

$$\varepsilon_{x(z)} = \varepsilon_x + Z\kappa_x; \quad \varepsilon_{y(z)} = \varepsilon_y + Z\kappa_y; \quad \gamma_{xy(z)} = \gamma_{xy} + Z\chi_{xy},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx}; \quad \kappa_x = -\frac{d^2w}{dx^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\cos \theta}{r}u + \frac{\sin \theta}{r}w; \\ \kappa_y &= -\left(\frac{w \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{u \sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{dw \cos \theta}{dx} \frac{1}{r}\right); \\ \gamma_{xy} &= -\frac{v \cos \theta}{r} + \frac{dv}{dx}; \quad \chi_{xy} = -2\frac{v \sin \theta \cos \theta}{r^2} + 2\frac{\sin \theta}{r} \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

В окончательном виде полученные выражения (2) можно представить в матричной форме

$$\varepsilon = \mathbf{LU}, \quad (3)$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \chi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_r & s_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_r + d/dx & 0 & 0 \\ 0 & -d^2/dx^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_r c_r & -s_r^2 - c_r d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2s_r c_r + 2s_r d/dx & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix},$$

где $c_r = \frac{\cos \theta}{r}$; $s_r = \frac{\sin \theta}{r}$.

Для приближенного описания свойств зададим аппроксимацию полей перемещений — касательные перемещения аппроксимируем линейными полиномами, нормальные перемещения — полиномом третьей степени:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x; \\ w &= a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3; \\ v &= a_7 + a_8x, \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi a}, \quad (4)$$

что при стыковке отдельных КЭ (рис. 5) обеспечивает непрерывность касательных, нормальных перемещений и углов поворота нормальных сечений. В развернутом виде уравнение (4) выглядит следующим

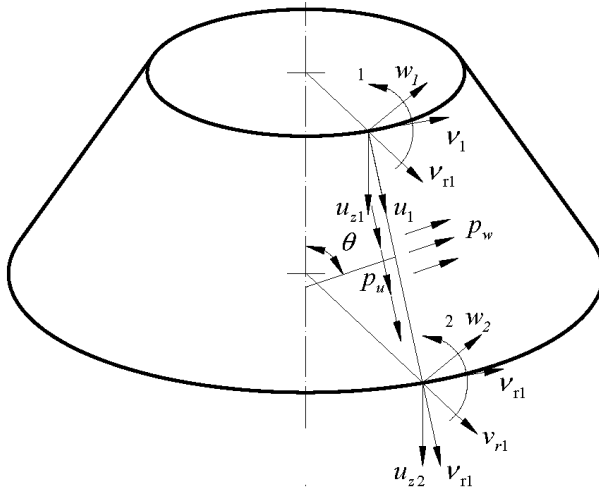


Рис. 5. Конечный элемент с распределенными силами

образом:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \mathbf{a};$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8]^T,$$

где \mathbf{a} — матрица коэффициентов аппроксимации. Эти коэффициенты не имеют наглядного геометрического представления и в дальнейшем от этих коэффициентов перейдем к глобальным степеням свободы узлов.

Согласно соотношениям (3), аппроксимируя перемещения (4), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}\Phi\mathbf{a} = \mathbf{B}\mathbf{a}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\Phi =$$

$$= \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_r & s_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_r + d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d^2/dx^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_r c_r & -s_r^2 - c_r d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2s_r c_r + 2s_r d/dx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_r & c_r x & s_r & s_r x & s_r x^2 & s_r x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_r & -c_r x + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x & 0 & 0 & 0 \\ -s_r c_r - s_r c_r x - s_r^2 - s_r x^2 - c_r - s_r^2 x^2 - 2c_r x - s_r^2 x^3 - 3c_r x^2 & 0 & 0 & 0 & -2s_r c_r - 2s_r c_r x + 2s_r \end{bmatrix}.$$

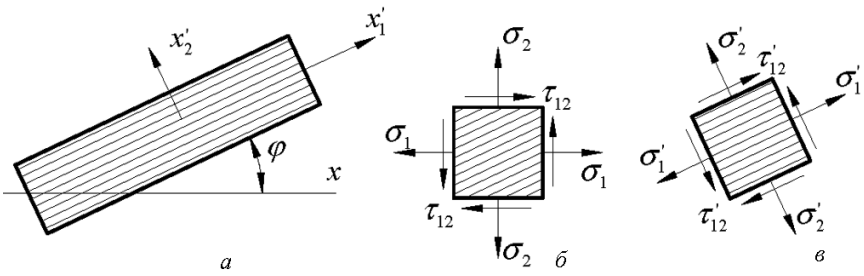


Рис. 6. Система координат и напряжения

Запишем физические соотношения упругости, учитывая температурные и начальные деформации. В системе координат отдельного слоя (x'_1, x'_2) (рис. 6) эти соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \gamma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \tau'_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon'_{10} \\ \varepsilon'_{20} \\ \gamma'_{120} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1^0 \Delta T \\ \alpha_2^0 \Delta T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\varepsilon'_{10}, \varepsilon'_{20}, \gamma'_{120}$ — начальные продольные, поперечные и сдвиговые деформации, заданные в системе координат слоя; α_1^0, α_2^0 — коэффициенты линейного температурного расширения (индекс слоя здесь опущен).

Соотношения, обратные (6), т.е. напряжения, выраженные через деформации в координатах слоя, представляем следующим образом:

$$\sigma' = \mathbf{E}' \varepsilon' + \mathbf{E}' \varepsilon'_0 - \mathbf{E}' \varepsilon'_T, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \overline{E}'_1 & \mu_{12} \overline{E}'_1 & 0 \\ \mu_{12} \overline{E}'_2 & \overline{E}'_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}; \quad \overline{E}'_1 = \frac{E'_1}{1 - \mu'_{12} \mu'_{21}}.$$

Если перевести соотношения (7) в систему координат оболочки, используя преобразование компонент тензора деформаций при повороте системы координат [1, 2], то получаем выражение

$$\sigma = \mathbf{E} \varepsilon + \mathbf{E} \varepsilon_0 - \mathbf{E} \varepsilon_T, \quad (8)$$

где $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]^T$; $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}]$; \mathbf{E} — матрица коэффициентов упругости, имеющая вид

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{21} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \beta^T \mathbf{E}' \beta; \quad \sigma_T = \beta^T \mathbf{E}' \varepsilon'_T;$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin 2\varphi & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix};$$

$\varepsilon_0 = [\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, 0]^T$ — начальные деформации, заданные в системе координат оболочки.

Приведем описание КЭ, нагруженного внешними силами и подвергнутого тепловому воздействию. Считаем тепловое воздействие стационарным, осесимметричным и полагаем, что для такого теплового воздействия решена задача теплопроводности и температурные поля определены. В этом случае погонные силы и моменты следует вычислять, пользуясь соотношениями упругости (учитывая начальные и температурные деформации), далее на основе уравнений (8) можно записать

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\varepsilon + \mathbf{N}_0 - \mathbf{N}_T, \quad (9)$$

или в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \chi_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{10} \\ N_{20} \\ N_{120} \\ M_{10} \\ M_{20} \\ M_{120} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{1T} \\ N_{2T} \\ N_{12T} \\ M_{1T} \\ M_{2T} \\ M_{12T} \end{bmatrix};$$

здесь N_1, N_2 — погонные меридиональная и кольцевая силы; M_1, M_2 — соответственно погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости и погонный окружной изгибающий момент:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i dz; \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i z dz, \quad i = 1, 2,$$

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} dz \text{ — погонная сила сдвига; } M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12} z dz \text{ — погонный момент крутки; } B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} \text{ — коэффициенты мембранных, смешанных и изгибных погонных жесткостей соответственно.}$$

Если в качестве координатной поверхности выбрать срединную поверхность оболочки, то для однородного ортотропного материала оболочки смешанные жесткости $C_{ij} = 0$, а мембранные и изгибные жесткости определяются как

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}; \quad B_{33} = G_{12} h;$$

$$B_{12} = \mu_{12} B_{11} = B_{21} = \mu_{21} B_{11}; \quad B_{13} = B_{31} = 0; \quad B_{23} = B_{32} = 0;$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12}\mu_{21})}; \quad D_{33} = \frac{G_{12} h^3}{12};$$

$$D_{12} = \mu_{12} D_{11} = D_{21} = \mu_{21} D_{11}; \quad D_{13} = D_{31} = 0; \quad D_{23} = D_{32} = 0;$$

$E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$; E_1, E_2 — модули упругости в направлении меридиана и окружном направлениях; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты поперечных деформаций (аналогичные коэффициенту Пуассона для изотропного материала).

Если стенка оболочки состоит из n различных ортотропных слоев (см. рис. 5), то коэффициенты погонных жесткостей вычисляются следующим образом:

$$B_{ij} = \sum_{K=1}^n E_{ij}^{[K]} (Z_{K+1} - Z_K); \quad C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n E_{ij}^{[K]} (Z_{K+1}^2 - Z_K^2);$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n E_{ij}^{[K]} (Z_{K+1}^3 - Z_K^3), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $E_{11}^{[K]} = \frac{E_1^{[K]}}{1 - \mu_{12}^{[K]} \mu_{21}^{[K]}}$; $E_{22}^{[K]} = \frac{E_2^{[K]}}{1 - \mu_{12}^{[K]} \mu_{21}^{[K]}}$; $E_{12}^{[K]} = E_{11}^{[K]} \mu_{21}^{[K]}$;

$E_1^{[K]} \mu_{21}^{[K]} = E_2^{[K]} \mu_{12}^{[K]}$; n — число слоев; Z_{K+1}, Z_K — нормальные координаты K -го слоя.

В случае равномерного распределения по толщине пакета $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}$ можно записать

$$N_{10} = \sum_{K=1}^n (E_{11}^{[K]} \varepsilon_{10} + E_{12}^{[K]} \varepsilon_{20}) (Z_{K+1} - Z_K) = B_{11} \varepsilon_{10} + B_{12} \varepsilon_{20};$$

$$M_{10} = C_{11} \varepsilon_{10} + C_{12} \varepsilon_{20}; \quad N_{120} = M_{120} = 0,$$

или

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{B} \bar{\varepsilon}_0; \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{C} \bar{\varepsilon}_0; \quad \mathbf{N}_0 = [N_{10}, N_{20}, N_{120}]; \quad \mathbf{M}_0 = [M_{10}, M_{20}, M_{120}];$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

В случае равномерного распределения по толщине многослойного пакета перепада температуры ΔT получаем (индекс K указывает на принадлежность к K -му слою):

$$N_T = \sum_{K=1}^n \bar{\sigma}_T^{[K]} (Z_{K+1} - Z_K); \quad M_T = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n \bar{\sigma}_T^{[K]} (Z_{K+1}^2 - Z_K^2),$$

где $\bar{\sigma}_T^{[K]} = \bar{\beta}_{[K]}^T \bar{E}'_K \bar{\varepsilon}'_{[K]T}$; $\bar{\sigma}_T^{[K]} = [\sigma_{1T}^{[K]}, \sigma_{2T}^{[K]}, 0]$; $\bar{\varepsilon}'_{[K]T} = [\alpha_{1[K]}^0 \Delta T, \alpha_{2[K]}^0 \Delta T, 0]^T$;

$$\bar{\beta}_{[K]} = \bar{\beta}_{[K]}^T \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_K & \sin 2\varphi_K & \sin \varphi_K \cos \varphi_K \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin \varphi_K \cos \varphi_K \\ -\sin 2\varphi_K & \sin 2\varphi_K & \cos 2\varphi_K \end{bmatrix};$$

$$\bar{E}'_{[K]} = \begin{bmatrix} E_1^{[K]} & \mu_{21}^{[K]} E_1^{[K]} & 0 \\ \mu_{21}^{[K]} E_1^{[K]} & E_1^{[K]} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{[K]} \end{bmatrix}.$$

Для равновесного состояния отдельного КЭ запишем формулировку принципа возможных перемещений:

$$2\pi \int_0^l (\delta \mathbf{E}^T \mathbf{N} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{p}) r dx - 2\pi \delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} = 0, \quad (10)$$

где l — длина КЭ вдоль образующей; $\delta \mathbf{E} = [\delta \varepsilon_1, \delta \varepsilon_2, \delta \gamma_{12}, \delta \kappa_1, \delta \kappa_2, \delta \chi_{12}]^T$ — вектор обобщенных возможных деформаций;

$\delta \mathbf{U} = [\delta u, \delta w, \delta v]^T$ — вектор возможных перемещений;

$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_{12}, M_1, M_2, M_{12}]^T$ — вектор внутренних силовых факторов; $\mathbf{p} = [p_u, p_w, p_v]^T$ — вектор распределенных поверхностных касательных и нормальных сил;

$\delta \mathbf{q} = [\delta u_{r1}, \delta u_{z1}, \delta v_1, \delta \omega_1, \delta u_{r2}, \delta u_{z2}, \delta v_2, \delta \omega_1]^T$ — глобальные узловые степени свободы;

$\mathbf{R} = [r_1 N_{r1}, r_1 N_{z1}, r_1 N_{12}, r_1 M_{\omega 1}, r_2 N_{r2}, r_2 N_{z2}, r_2 N_{12}, r_2 M_{\omega 2}]^T$ — вектор обобщенных узловых реакций.

Запишем уравнение (10) в развернутом виде с учетом соотношений упругости (9) и аппроксимации деформаций (5):

$$\delta \mathbf{a}^T (\mathbf{K}_a \mathbf{a} + \mathbf{P}_{0a} - \mathbf{P}_{Ta} - \mathbf{P}_a) - \delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} = 0, \quad (11)$$

где $\mathbf{K}_a = \int_0^l \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a r dx$; $\mathbf{P}_{0a} = \int_0^l \mathbf{B}_a^T \mathbf{N}_0 r dx$; $\mathbf{P}_{Ta} = \int_0^l \mathbf{B}_a^T \mathbf{N}_T r dx$;

$$\mathbf{P}_a = \int_0^l \Phi_a^T \mathbf{p} r dx.$$

Выполним в уравнении (11) две замены неизвестных. Сначала перейдем от коэффициентов аппроксимации a к локальным узловым степеням свободы

$$\mathbf{q} = [u_{r1}, u_{z1}, v_1, \omega_1, u_{r2}, u_{z2}, v_2, \omega_2]^T,$$

где $\omega_1 = w'(x=0)$; $\omega_2 = w'(x=l)$.

Для этого воспользуемся аппроксимацией (4) и составляем уравнение

$$\mathbf{T} \mathbf{a} = \mathbf{q}_1, \quad (12)$$

которое в матричной форме будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Решением уравнений (12) будет выражение $\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}_n$.

Аналогичным образом определим связь $\delta\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1}\delta\mathbf{q}_n$. Тогда равновесное состояние для КЭ можно определить по уравнению

$$\delta\mathbf{q}_n^T \{ (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{K}_a \mathbf{T}^{-1} - (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_{0a} + (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_{Ta} - \mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_n \} - \delta\mathbf{q}^T \mathbf{R} = 0,$$

или

$$\delta\mathbf{q}_n^T (\mathbf{K}_n \mathbf{q}_n + \mathbf{P}_{0n} - \mathbf{P}_{Tn} - \mathbf{P}_n) - \delta\mathbf{q}^T \mathbf{R} = 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{K}_n = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{K}_a \mathbf{T}^{-1}$; $\mathbf{P}_{0n} = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_{0a}$; $\mathbf{P}_{Tn} = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_{Ta}$; $\mathbf{P}_n = (\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{P}_l$.

Теперь перейдем к степеням свободы в ГСК. Для этого, согласно уравнению (1), выразим степени свободы \mathbf{q}_n в ЛСК через степени свободы \mathbf{q} в ГСК

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{S}\mathbf{q},$$

или

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_{r2} \\ u_{z2} \\ v_2 \\ \omega_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично получаем $\delta\mathbf{q}_n = \mathbf{S}\delta\mathbf{q}$. Тогда равновесное состояние для КЭ (13) запишем через степени свободы в ГСК:

$$\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_T - \mathbf{P} - \mathbf{R}) = 0, \quad (14)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{S}^T \mathbf{K}_n \mathbf{S}$; $\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}^T \mathbf{P}_{0n}$; $\mathbf{P}_T = \mathbf{S}^T \mathbf{P}_{Tn}$; $\mathbf{P} = \mathbf{S}^T \mathbf{P}_n$.

Из уравнения (14) в силу произвольности $\delta\mathbf{q}^T$ следует искомое уравнение

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{P}_\Sigma,$$

где $\mathbf{P}_\Sigma = -\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_T + \mathbf{P}$ — вектор приведенных узловых сил, учитывающий начальные температурные деформации и внешние распределен-

ные поверхностные силы. Матрицу \mathbf{K} называют матрицей жесткости КЭ в ГСК.

После решения задачи для каждого КЭ будут определены степени свободы \mathbf{q} в ГСК. Для того чтобы вычислить перемещения в ЛСК, в центре КЭ нужно выполнить следующие операции:

$$\mathbf{U}(x = l/2) = \mathbf{\Phi}(x = l/2)\mathbf{a} = \mathbf{\Phi}(x = l/2)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{\Phi}^*\mathbf{q},$$

где матрицу

$$\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{\Phi}(x = l/2)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}$$

следует подготовить при обработке КЭ.

Для того чтобы вычислить обобщенные деформации в центре КЭ, нужно выполнить следующие операции:

$$\mathbf{E}(x = l/2) = \mathbf{B}(x = l/2)\mathbf{a} = \mathbf{B}(x = l/2)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{B}^*\mathbf{q}, \quad (15)$$

где матрицу

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B}(x = l/2)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}$$

следует подготовить при обработке КЭ.

Для вычисления погонных силовых факторов в центре КЭ нужно обобщенные деформации (15) умножить на матрицу коэффициентов приведенных жесткостей:

$$\mathbf{N}(x = l/2) = \mathbf{D}\mathbf{E}(x = l/2) = \mathbf{D}\mathbf{B}^*\mathbf{q}.$$

Достоверность разработанной модели проверялась аналогично данным работы [3] на экспериментальных образцах трехслойных параболических оболочек, полученных склеиванием несущих слоев (НС) со слоями заполнителя при нагреве. Оболочки имели диаметр 649 мм, при этом каждую из обшивок рефлектора формовали из четырех монослоев углепластика со следующей структурой укладки: $[0^\circ / -90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$; $[0^\circ / -70^\circ / 70^\circ / 0^\circ]$; $[0^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 0^\circ]$. Толщина НС после формования составляла 0,45...0,48 мм. Толщина монослоя $h = 0,12$ мм. Заполнитель — алюминиевые соты высотой $H = 10$ мм. Оправка аппроксимируется сферическим сегментом с внутренним радиусом (совпадающим с радиусом оправки) $R_{\text{опр}} = 1100$ мм и углом полураствора $\theta = 16^\circ$.

Поскольку формование обшивок и последующее склеивание слоев оболочки рефлектора происходит при повышенной температуре, в расчетах учитываются зависимости свойств углепластика от температуры. Так, например, при температуре 175°C были приняты следующие свойства углепластика: $E_1 = 128,8$ ГПа; $E_2 = 2,8$ ГПа; $G_{12} = 0$; $G_{13} = G_{23} = G_{12}$; $\nu_{12} = 0,33$; $\alpha_1^0 = -2,125 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $\alpha_2^0 = 63 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$. Результаты расчетов и экспериментальных исследований приведены на рис. 7, 8.

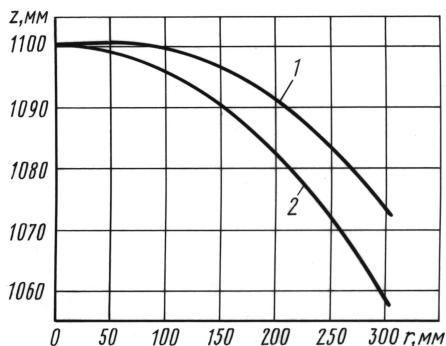


Рис. 7. Отклонение профиля поверхности оболочки (схема армирования НС $[0^\circ / -90^\circ / +90^\circ / 0^\circ]$) после склеивания с нагревом:

1 — поверхность рефлектора; 2 — поверхность оправки

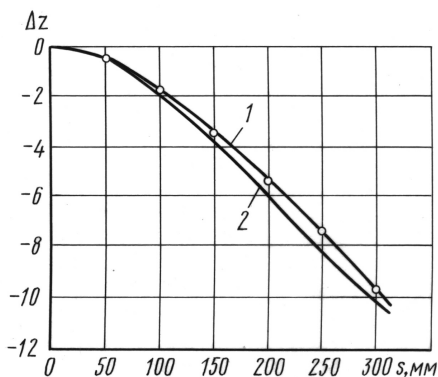


Рис. 8. Экспериментальные (1) и расчетные (2) отклонения аппликат Δz профиля поверхности рефлектора (схема армирования НС $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$) после склеивания с нагревом (1, 2 как на рис. 7)

Для оценки точности соответствия геометрии полученной поверхности заданной теоретической форме рассчитывали среднеквадратическое отклонение (СКО) поверхности в нормальном к идеальному контуру направлении, используя полученные значения нормальных перемещений w . СКО двух функций $f(x)$ и $F(x)$ на множестве n точек x_1, x_2, \dots, x_n определяли по уравнению

$$\Delta n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - F(x_i)]^2}.$$

В нашем случае одна из этих функций, характеризующая идеальный контур, тождественно равна нулю, в качестве второй функции следует взять перемещение w , т.е. СКО определяется по формуле

$$\Delta n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [w(\theta_i)]^2},$$

где n — число точек вдоль меридиана, в которых определялись перемещения.

Расчетные и экспериментальные СКО для схемы армирования $[0^\circ / -90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ соответственно равны: 5,42 и 5,2 мм; для схемы $[0^\circ / -70^\circ / 70^\circ / 0^\circ]$ — 0,075 и 0,08 мм; для схемы $[0^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 0^\circ]$ — 16,65 и 16,3 мм.

Для выявления рациональных схем армирования НС были рассчитаны обобщенные зависимости нормальных максимальных (w_{\max}), минимальных (w_{\min}) перемещений и значения СКО для всех схем армирования в диапазоне от 0° до 90° с интервалом в 1° . При $h_{\text{зап}} = 10$ мм, $R_{\text{опр}} = 1100$ мм, структуре НС $[0^\circ / -\varphi / \varphi / 0^\circ]$ (φ —

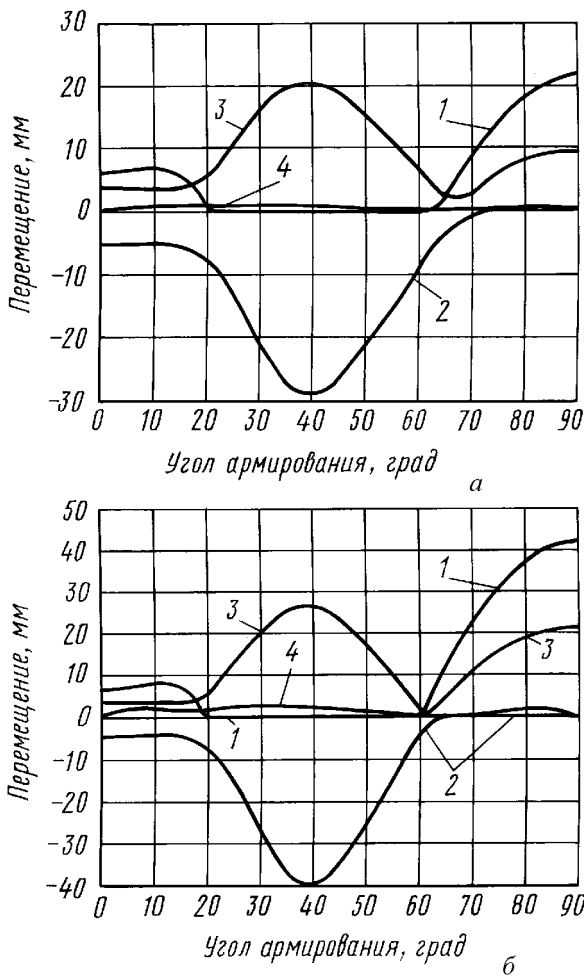


Рис. 9. Расчетные обобщенные зависимости максимальных w_{\max} (кривая 1), минимальных w_{\min} (кривая 2) нормальных перемещений, СКО (кривая 3) поверхности и максимальных касательных перемещений u_{\max} (кривая 4) при различных углах армирования для $h_0 = \delta$; $h_\varphi = \delta$ (а) и $h_\varphi = 3\delta$ (б)

угол армирования), толщины композитных слоев следующие: $h_0 = \delta$; $h_\varphi = \delta$; $\delta = 0,12$ мм. Результаты расчетов показаны на рис. 9, а.

Для $h_{\text{зап}} = 10$ мм, $R_{\text{опр}} = 1100$ мм, структуры НС $[0^\circ / -\varphi/\varphi/0^\circ]$, толщины композитных слоев равны: $h_0 = \delta$; $h_\varphi = 3\delta$; $\delta = 0,12$ мм. Результаты расчетов показаны на рис. 9, б. Как видно из рисунка, для схемы армирования $[0^\circ / -67^\circ/67^\circ/0^\circ]$ в этом случае удастся получить минимальные значения нормальных перемещений и СКО. При данной схеме реализации технологического процесса можно получить необходимую точность геометрических характеристик изделия, применяя следующую схему укладки монослоев в НС: $[0^\circ / -67^\circ/67^\circ/0^\circ]$. Для других толщин композитных слоев оптимальный угол укладки может быть иным, например $\varphi = 62^\circ$ (см. рис. 9, б).

На основе полученных зависимостей при необходимости можно корректировать (дорабатывать) кривизну оснастки в целях получения изделия нужной геометрии при различных схемах армирования. С помощью данных расчетов на этапе проектирования и выбора конструкторско-технологических параметров изделия можно выявить, какую кривизну (фокусное расстояние, диаметр, высоту прогиба и др.) после изготовления будет иметь конструкция.

Если выбрать структуру НС рефлектора в виде $[90^\circ/2/ - \varphi/ + \varphi/90^\circ]$, то при $h_{90^\circ} = h_\varphi = 0,12$ мм для всех φ значение СКО будет больше нуля и конструкция не будет отвечать техническим требованиям качества поверхности для конкретного рефлектора. Как видно из графиков (см. рис. 9), учет анизотропии многослойного пакета и касательных перемещений v для оптимальных узлов укладки φ не оказывает существенного влияния.

Сравнение профилей оболочки, рассчитанных с помощью разработанной на ЭВМ модели, с полученными экспериментальными данными показало их хорошее соответствие. Максимальная ошибка результатов, полученных по разработанной методике расчета, по сравнению с экспериментальными данными не превышает 7%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С е к у л о в и ч М. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
2. П о п о в Б. Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. – 294 с.

Статья поступила в редакцию 12.03.2007

Данг Нгок Ань родился в 1976 г., окончил Вьетнамский технический университет им. Ле Куй Дона в 2000 г. Аспирант кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Dang Ngok An (b.1976) graduated from the Vietnam Technical University n. a. Le Qui Don in 2000. Post-graduate of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University.