

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧКИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ЧЕРЕЗ ЗАБОРНОЕ УСТРОЙСТВО

Рассмотрена задача о малых осесимметричных колебаниях тонкостенной оболочки вращения, частично наполненной несжимаемой идеальной жидкостью, вытекающей через заборное устройство. Подобная задача актуальна при исследовании продольных колебаний ракеты с жидкостным ракетным двигателем.

Рассмотрим предлагаемую задачу в линейной казистационарной постановке. Колебания оболочки с жидкостью без учета эффекта вытекания жидкости через заборное устройство ранее рассматривались в работах А.А. Пожалостина [1–3].

Заборное устройство — основной элемент топливного бака ракеты с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД). Требования, предъявляемые к таким устройствам, заключаются в обеспечении равномерного понижения уровня компонентов топлива для создания непрерывной подачи топлива без нарушения сплошности потока.

По числу выводов расходных магистралей из днищ заборные устройства подразделяются на одноточечные и многоточечные [4]. В конструкциях топливных баков современных ракетносителей все большее применение находят многоточечные заборные устройства, состоящие из перфорированных пластин и желобов.

Постановка задачи. Бак с топливом представляет собой один из основных конструктивных элементов устройства. Динамические характеристики бака с жидкостью — собственные частоты и формы колебаний — исключительно важны при определении форм и частот продольных колебаний корпуса ракеты, а значения этих характеристик позволяют определить входные параметры магистрали системы подачи.

Рассматриваемый в настоящей работе топливный бак представляет собой конструкцию, состоящую из упругой оболочки и частично перфорированного жесткого днища, имитирующего заборное устройство.

Пусть бак частично заполнен идеальной жидкостью и жестко заземлен по периметру стыковочного шпангоута, соединяющего обечайку с днищем. Рассмотрим малые свободные осесимметричные колебания топливного бака с жидкостью относительно некоторого невозмущенного состояния.

Невозмущенное состояние. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ с осями Ox_1, Ox_2 , совпадающими с плоскостью невозмущенной свободной поверхности Γ_0 .

За невозмущенное состояние принимается установившееся движение жидкого топлива, характеризуемое средней постоянной скоростью опускания V_0 невозмущенной свободной поверхности Γ_0 и средней постоянной скоростью V_Σ^0 на поверхности слива Σ . Под поверхностью

слива Σ подразумевается плоская поверхность перфорированной пластины заборного устройства. Будем считать, что невозмущенное движение жидкости описывается величинами, для которых выполняются следующие уравнения:

$$V_0 S_{\Gamma_0} = V_{\Sigma}^0 S_{\Sigma}, \quad (1)$$

— уравнение расхода, где S_{Γ_0} — площадь поперечного сечения бака плоскостью, совпадающей с плоскостью Γ_0 ; S_{Σ} — площадь поверхности слива;

$$p^0(x_3) = p_n - g\rho x_3 \quad (2)$$

— основной закон гидростатики, где p_n — постоянное давление наддува, ρ — плотность жидкости;

$$p_1^0(-H) - p_2^0(-H) = \xi\rho \frac{(V_{\Sigma}^0)^2}{2} \quad (3)$$

— уравнение для перепада давления на пластине заборного устройства, где H — глубина жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$; ξ — коэффициент гидравлического сопротивления заборного устройства, приведенный к скорости V_{Σ}^0 , зависящий от коэффициента “живого” сечения $\bar{f} = S_0/S_{\Sigma}$, формы краев отверстий и числа Рейнольдса, $\xi = 0,5 \dots 3,5$ (в зависимости от конструкции заборного устройства) [1];

$$p^0(0) = p_n \quad (4)$$

— равенство давлений на свободной поверхности Γ_0 .

За невозмущенное состояние упругой конструкции примем состояние, отвечающее решению статической задачи о равновесии упругой конструкции под действием давления $p^0(x_3)$, обусловленное невозмущенным движением жидкости.

Уравнения малых колебаний системы. Рассмотрим малые колебания жидкости и упругой оболочки, близкие к состоянию невозмущенного движения. Предположим, что в возмущенном движении поля смещений, скоростей и давлений частиц жидкости приобретают малые отклонения $\vec{w}(x, t)$, $\vec{v}(x, t)$, $p(x, t)$ соответственно от их средних невозмущенных значений. Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и более, выразим вектор $\vec{v}(x, t)$ как

$$\vec{v}(x, t) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}(x, t) = \dot{\vec{w}}(x, t).$$

Уравнение возмущенной свободной поверхности жидкости в системе координат $Ox_1x_2x_3$ при малых колебаниях запишем в виде

$$x_3 = f(x_1, x_2, 0, t), \quad (5)$$

где $f(x_1, x_2, 0, t) = w(x_1, x_2, 0, t)$ — проекция на ось Ox_3 поля смещений частиц свободной поверхности жидкости.

При колебаниях жидкости давление в области, занимаемой жидким топливом, определяется суммой $p^0(x_3) + p(x_1, x_2, x_3, t)$. Тогда на возмущенной свободной поверхности выполняется условие $p^0(x_3) + p(x_1, x_2, x_3, t) = p_n$.

Поле скоростей на поверхности слива в возмущенном движении можно представить как $\bar{V}_\Sigma = \bar{V}_\Sigma^0 + \dot{w}_\Sigma$, а перепад давления на пластине заборного устройства — следующим уравнением:

$$p_1^0(-H) + p(x_1, x_2, -H, t) - p_2^0(-H) = \xi \rho \frac{\bar{V}_\Sigma^2}{2}. \quad (6)$$

Линеаризуя условия на поверхностях Γ_0 и Σ и учитывая уравнения (2), (3) для малых отклонений, получаем граничные условия:

$$p = g\rho \vec{w}_\Gamma \cdot \vec{n}_\Gamma \quad \text{при } x = 0; \quad (7)$$

$$p = \gamma \rho \dot{w}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad \text{при } x_3 = -H, \quad (8)$$

где $\vec{n}_\Gamma, \vec{n}_\Sigma$ — внешние нормали к поверхностям Γ и Σ соответственно; $\gamma = \xi V_\Sigma^0$ — обобщенный коэффициент сопротивления поверхности слива.

Очевидно, что рассматриваемые движения жидкости, если пренебречь влиянием вязкости, описываются линеаризованным уравнением Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f} \quad (9)$$

(\vec{f} — заданное отклонение поля внешних сил от невозмущенных значений), которое необходимо дополнить уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

условием непротекания через смачиваемую поверхность S

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \dot{U} \cdot \vec{n},$$

($\vec{U} = (u_0, 0, w_0)$ — вектор смещений частиц смачиваемой поверхности оболочки).

Рассмотрим осесимметричные колебания конструкции топливного бака. Составим систему уравнений совместного движения обечайки и жидкости. Согласно данным из работы [5], запишем уравнения оболочки в виде

$$\begin{aligned} L_{11}u_0 + L_{12}w_0 &= q_1, & q_1 &= -m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}; \\ L_{21}u_0 + L_{22}w_0 &= q_2, & q_2 &= -m \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + p, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ — дифференциальные операторы общей технической теории тонких оболочек; p — гидродинамическое давление жидкости; $m = \rho_0 h_0$ — масса единицы поверхности оболочки; ρ_0 — плотность материала оболочки; h_0 — толщина оболочки.

Для получения определенного решения малых движений оболочки необходимо дополнить уравнения (10) начальными и граничными условиями, отвечающими условиям закрепления оболочки.

Отметим, что имеющиеся в литературе [6–8] сведения по колебаниям упругих металлических оболочек с жидкостью показывают справедливость следующих выводов:

1) несмоченная часть оболочки практически не участвует в колебаниях, поэтому ее можно не рассматривать, т.е. считать, что оболочка заполнена жидкостью до верхнего края;

2) условия закрепления торцов существенно не влияют на частоты и формы колебаний (кроме ε -окрестности вблизи торцов) и могут быть выбраны такими, которые позволят получить наиболее простые решения;

3) влияние тангенциальных сил инерции оболочки $\rho_0 h_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ при наличии жидкости внутри нее уменьшается, поэтому тангенциальными силами инерции можно пренебречь.

Постановка задачи для потенциала смещений. При исследовании малых движений идеальной жидкости удобно ввести понятие потенциала смещений: $\phi(x, t)$, ($x = (x_1, x_2, x_3)$), связанного с полем смещений $\vec{w}(x, t)$ и полем скоростей $\vec{v}(x, t)$ частиц жидкости формулами

$$\vec{w}(x, t) = \nabla \phi(x, t); \quad \vec{v}(x, t) = \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (11)$$

Подставив формулы (11) в уравнение Эйлера (9), после интегрирования получим линеаризованный интеграл Коши–Лагранжа, выраженный через потенциал смещений:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{p}{\rho} = c(t), \quad (12)$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени, которая в рассматриваемых задачах может быть равна нулю. Предположив, что движения жидкости — потенциальные, сформулируем краевую задачу для определения функции $\phi(x, t)$. Используя уравнения (10), уравнение неразрывности и граничные условия (6), (7), получаем

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{в } Q; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} = f_1(x, t) \quad \text{на } \Gamma_0; \quad (14)$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} \right) = f_2(x, t) \quad \text{на } \Sigma, \quad (15)$$

которые необходимо дополнить граничным кинематическим условием на смачиваемой поверхности S оболочки

$$w_0 = \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \text{ на } S \quad (16)$$

и силовыми условиями взаимодействия оболочки с жидкостью, которые с учетом формул (12) и (16) и выводов (1)–(3) можно записать в виде

$$L \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \end{array} \right\} + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n_0} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{array} \right) \text{ на } S, \quad (17)$$

где $L = \{L_{jk}\}_{j,k=1}^2$ – самосопряженный оператор теории тонких оболочек, а $f_k(x, t)$, $k = 1, 2$, в уравнениях (14) и (15) – заданные внешние воздействия.

Закон изменения энергии. Умножим динамические граничные условия (14), (15) и (17) на $\rho(\dot{w}_\Gamma)$, $\rho(\dot{w}_\Sigma)$ и \dot{U} соответственно и проинтегрируем по поверхностям Γ_0 , Σ и S . Суммируя полученные результаты и учитывая кинематическое условие (16), после несложных преобразований получим выражение

$$\frac{d}{dt}(T_{\text{ж}} + T_{\text{об}} + \Pi_{\text{ж}} + \Pi_{\text{об}}) = -2\Phi^* + A^{(e)}, \quad (18)$$

где $T_{\text{ж}} = \frac{1}{2}\rho \int_Q (\nabla \dot{\phi})^2 dQ$ – кинетическая энергия жидкости; $T_{\text{об}} = \frac{1}{2}\rho_0 h_0 \int_S (\dot{U}_0)^2 dS$ – кинетическая энергия оболочки; $\Pi_{\text{ж}} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} \rho g \left(\frac{\partial \phi}{\partial n_\Gamma} \right)^2 d\Gamma_0$ – потенциальная энергия жидкости; $\Pi_{\text{об}} = \frac{1}{2} \int_S (L^{1/2} \dot{U}_0)^2 dS$ – потенциальная энергия оболочки; $\Phi = \frac{1}{2} \gamma \rho \int_\Sigma \left(\frac{\partial \dot{\phi}}{\partial n} \right)^2 d\Sigma$ – диссипативная функция малых движений жидкости; $A^{(0)} = \int_{\Gamma_0} f_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 d\Gamma_0 + \int_\Sigma f_2 \left(\frac{\partial w_3}{\partial t} \right)^2 d\Sigma$ – работа внешних воздействий на жидкость.

Закон изменения энергии показывает, что в рассматриваемой механической системе работа внешних воздействий лишь частично расходуется на изменение полной механической энергии.

Собственные колебания. Предположив, что $f_1(x, t) = f_2(x, t) = 0$, решение задачи можно записать как

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= u_0(x)e^{\Omega t}; & w_0(x, t) &= w_0(x)e^{\Omega t}; \\ p(x, t) &= p(x)e^{\Omega t}; & \varphi(x, t) &= \varphi(x)e^{\Omega t}. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате некоторых преобразований получим задачу о собственных колебаниях следующего вида:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } Q; \quad (20)$$

$$\Omega^2\varphi + g\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_0; \quad (21)$$

$$\Omega^2\varphi - \gamma\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma; \quad (22)$$

$$L \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \end{array} \right\} + \rho_0 h_0 \Omega^2 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega^2 \rho \varphi \end{pmatrix} \text{ на } S; \quad (23)$$

здесь нетривиальными решениями являются функции $\varphi_n(x, \Omega_n)$, $n = 1, 2, 3 \dots$, именуемые собственными функциями, и действительные или комплексные числа Ω_n , $n = 1, 2, 3 \dots$, называемые собственными значениями.

Модельная задача для цилиндрической оболочки. Рассмотрим безмоментную цилиндрическую круговую оболочку радиуса $r = r_0$ и высотой H , имеющую жесткое перфорированное дно и частично заполненную жидкостью. Исключив из уравнения (23) функцию $u_0(x)$, получим спектральную задачу об определении частоты Ω и функции $\varphi(r, x)$, записанную в цилиндрической системе координат x, r, η :

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } Q; \quad (24)$$

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \Omega^2\varphi = 0, \quad x = 0; \quad (25)$$

$$\Omega^2\varphi - \gamma\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad x = -H; \quad (26)$$

$$\Omega^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \Omega_k^2\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\rho_0 h_0}\Omega^2\varphi \text{ на } S, \quad (27)$$

где $\Omega_k^2 = \frac{E}{\rho_0 r_0^2}$ – квадрат частоты собственных радиальных колебаний упругого кольца; E – модуль упругости материала цилиндрической оболочки.

Используя метод разделения переменных, получаем решение задачи (24)–(27) в виде

$$\varphi_n = J_0\left(y_n \frac{r}{r_0}\right) \left(-\frac{y_n}{\Omega_n^2} \operatorname{ch} y_n \bar{x} + \operatorname{sh} y_n \bar{x}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а $\bar{\Omega}_n, y_n$ являются решением трансцендентных уравнений;

$$\bar{\Omega}_n^2 = \frac{\bar{\Omega}_k^2 y_n J_1(y_n)}{\frac{\rho r_0}{\rho_0 h} J_0(y_n) - y_n J_1(y_n)},$$

$$\bar{\Omega}_n^3 \operatorname{th} y_n \bar{H} + \bar{\Omega}_n^2 \bar{\gamma} y_n + \bar{\Omega}_n y_n + \bar{\gamma} y_n^2 \operatorname{th} y_n \bar{H} = 0, \quad (28)$$

где $\bar{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2 r_0}{g}$; $y = kr_0$; $J_0(y)$, $J_1(y)$ — функции Бесселя первого рода

нулевого и первого порядков соответственно; $\bar{H} = \frac{H}{r_0}$; $\bar{\gamma} = \gamma \frac{1}{\sqrt{gr_0}}$;

$$\bar{x} = \frac{x}{r_0}; b = \frac{\rho r_0}{\rho_0 h_0}.$$

Рассматриваемая задача, кроме решений y, Ω , имеет и другие решения. Пусть $y = iz$, тогда потенциал φ_l запишется в виде

$$\varphi_l = I_0\left(z_l \frac{r}{r_0}\right) \left(-\frac{z_l}{\bar{\Omega}_l^2} \cos z_l \bar{x} + \sin z_l \bar{x}\right),$$

а $\bar{\Omega}_l, z_l$ являются решением трансцендентных уравнений

$$\bar{\Omega}_l^2 = \frac{-\bar{\Omega}_k^2}{1 + \frac{\rho r_0}{\rho_0 h} \frac{1}{z_l} \frac{I_0(z_l)}{I_1(z_l)}}; \quad (29)$$

$$\bar{\Omega}_l^3 \operatorname{tg} z_l \bar{H} + \bar{\Omega}_l^2 \bar{\gamma} z_l + \bar{\Omega}_l z_l - \bar{\gamma} z_l^2 \operatorname{tg} z_l \bar{H} = 0.$$

Здесь $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

Система трансцендентных уравнений (28) или (29) своими решениями может иметь как действительные, так и комплексные значения (y, Ω или z, Ω). Чтобы получить начальные приближительные значения корней систем трансцендентных уравнений, рассмотрим вспомогательную задачу.

Вспомогательная задача. Из имеющихся в литературе данных по колебаниям упругой конструкции с жидкостью следует, что волны на свободной поверхности жидкости, обусловленные действием внешнего поля массовых сил, практически не влияют на спектр и формы колебаний упругой металлической конструкции с жидкостью. Сформулируем вспомогательную спектральную задачу в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0 \text{ в } Q; \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_0; \quad (30)$$

$$\Omega \varphi - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad (\Omega^2 + \Omega_k^2) \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\rho_0 h} \Omega^2 \varphi \text{ на } S.$$

Решения задачи (30) можно записать как

$$\varphi_n = J_0\left(y_n \frac{r}{r_0}\right) \operatorname{sh} y_n \bar{x}, \quad \bar{\Omega}_n = -\bar{\gamma} y_n \operatorname{cth} y_n \bar{H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (31)$$

где y_n — корни трансцендентного уравнения

$$\frac{J_1(y_n)}{J_0(y_n)} = \frac{y_n b}{y_n^2 + \beta^2 \bar{\Omega}_k^2 \operatorname{th}^2(y_n \bar{H})}. \quad (32)$$

Кроме решения (31), задача (30) имеет и другие решения. Предположив $y = iz$, получаем

$$\varphi_l = I_0\left(z_l \frac{r}{r_0}\right) \sin z_l x, \quad \bar{\Omega}_l = \frac{i \bar{\Omega}_k}{\pm \sqrt{1 + \frac{b}{z_l} \frac{I_0(z_l)}{I_1(z_l)}}}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (33)$$

где z_l — корень трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} z_l \bar{H} = \frac{-\bar{\beta} \bar{\Omega}_k i}{z_l \sqrt{\frac{b}{z_l} \frac{I_0(z_l)}{I_1(z_l)} + 1}}. \quad (34)$$

Для определения корней воспользуемся графическим методом. Перепишем уравнение (32) в виде

$$F(y) = \frac{J_1(y_n)}{J_0(y_n)} - \frac{y_n b}{y_n^2 + \beta^2 \bar{\Omega}_k^2 \operatorname{th}^2(y_n \bar{H})} = 0, \quad (35)$$

предположим $y = \operatorname{Re} y + i \operatorname{Im} y$ и $F(y) = \operatorname{Re} F + i \operatorname{Im} F$.

Для графического исследования решений уравнений (32), (34) зададим $\bar{\beta} = 0,001; 0,1; 0,5$, а также $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\rho_{\text{об}} = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E = 2 \cdot 10^{11}$; $r_0 = 1 \text{ м}$; $h_0 = 0,002 \text{ м}$.

Построив графики $\operatorname{Re} F(y) = 0$, и $\operatorname{Im} F(y) = 0$, в точках их пересечения найдем искомые корни уравнения (32), аналогичным образом определим корни уравнения (34) (рис. 1, а, б).

Определив значения $\bar{\Omega}_0$, y_0 , z_0 для вспомогательной задачи, подставим их в систему трансцендентных уравнений (28) и (29) и найдем значения Ω_n , y_n , z_n для основной модельной задачи (24)–(27).

В таблице для значений $\bar{\beta} = 0,001; 0,1; 0,5$ приведены значения собственных и волновых чисел первых пяти тонов колебаний, отвечающих спектрам $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$.

Обсуждение результатов. На рис. 2 показано расположение значений $\bar{\Omega}_n$ на комплексной плоскости $\bar{\Omega}$. Из рис. 2 и таблицы следует, что рассматриваемая задача имеет три спектра собственных чисел $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$. Спектру $\Lambda^{(1)}$ отвечает множество действительных чисел

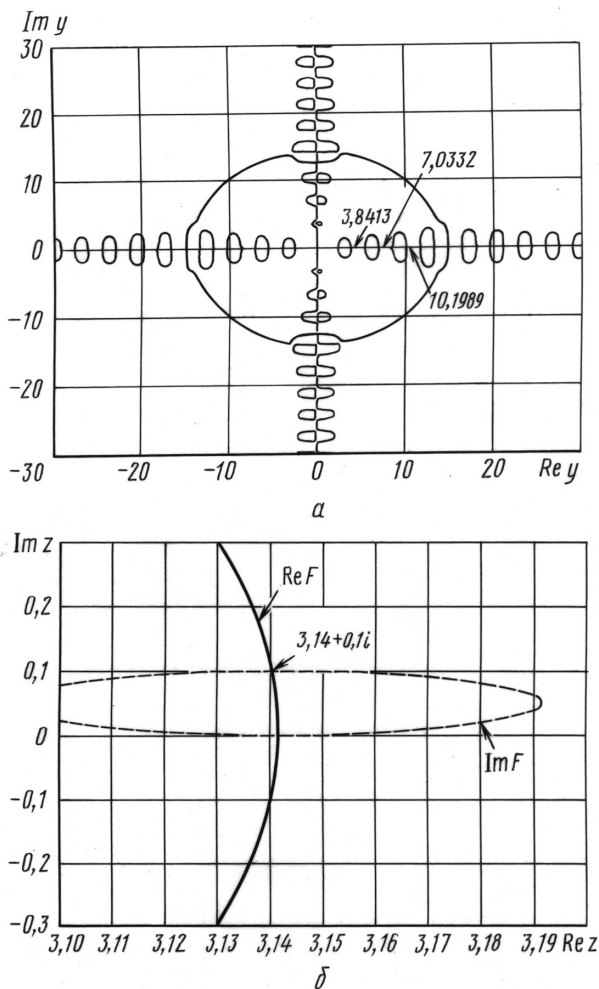


Рис. 1. Схема графического решения вспомогательной задачи:
a — уравнение (32); *b* — уравнение (34)

$\Omega_n^{(1)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\Omega_n^{(1)} \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Собственным числам $\Omega_n^{(1)}$ отвечают быстро затухающие аperiodические движения рассматриваемой механической системы. Спектр $\Lambda^{(2)}$ состоит из множества комплексно-сопряженных собственных чисел $\Omega_n^{(2)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, с $\text{Re}\Omega_n^{(2)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, с $\text{Im}\Omega_n^{(2)} \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Спектру $\Lambda^{(2)}$ отвечают слабозатухающие колебания рассматриваемой механической системы, преимущественно выраженные на свободной поверхности жидкости. Спектр $\Lambda^{(3)}$ состоит из множества комплексных собственных чисел $\Omega_n^{(3)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, с $\text{Re}\Omega_n^{(3)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, с $\text{Im}\Omega_n^{(3)} \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Спектру $\Lambda^{(3)}$ отвечают затухающие колебания рассматриваемой механической системы, выраженные преимущественно на поверхности обечайки.

Механический аналог. При анализе колебаний рассматриваемой механической системы удобно сопоставить упруго-жидкостной кон-

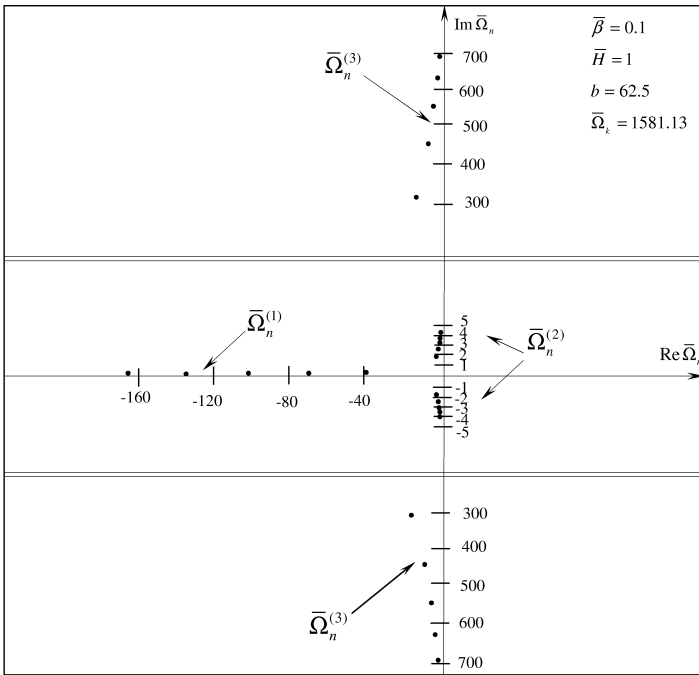


Рис. 2. Распределение $\bar{\Omega}_n$ на комплексной плоскости при $\bar{\beta} = 0,1$; $\bar{H} = 1$; $b = 62,5$; $\bar{\Omega}_k = 1581,13$

струкции некоторую, более простую механическую модель в виде осцилляторов. Для составления уравнения движения осцилляторов воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Для этого составим выражения для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} \dot{S}_n^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} C_{\text{пр}} \dot{S}_n^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b_{\text{пр}} \dot{S}_n^2,$$

где $m_{\text{пр}}$ — приведенная масса рассматриваемой механической системы при колебаниях по n -му тону,

$$m_{\text{пр}} = \rho \int_S \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n^* r d\eta dr dx + \rho_0 h \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} dS;$$

$C_{\text{пр}}$ — приведенный коэффициент жесткости,

$$C_{\text{пр}} = \frac{Eh}{r_0} \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \Big|_{r=r_0} dS + \rho g \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} d\Gamma_0;$$

$b_{\text{пр}}$ — приведенный коэффициент демпфирования,

$$b_{\text{пр}} = \gamma \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=-H} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \Big|_{x=-H} d\Sigma;$$

Значения собственных и волновых чисел пяти тонов колебаний

$\bar{\beta}_n$	Тоны колебаний					
	1	2	3	4	5	
0,001	y_n	$\pm 2,3502$	$\pm 5,4254$	$\pm 8,5126$	$\pm 11,6031$	$\pm 14,6956$
	$\bar{\Omega}_n^{(1)}$	$-2393,326$	$-5425,61$	$-8512,601$	$-11603,1$	$-14695,6$
	$\bar{\Omega}_n^{(2)}$	$-1,7857 \cdot 10^{-5} \pm 1,51916i$	$-3,878 \cdot 10^{-8} \pm 2,329i$	$-8,07 \cdot 10^{-11} \pm 2,918i$	$-1,67 \cdot 10^{-13} \pm 3,4063i$	$-3,44 \cdot 10^{-16} \pm 3,833i$
	z_n	$\pm 1,5729 \pm 0,1246i$	$\pm 4,7131 \pm 0,0842i$	$\pm 7,8543 \pm 0,0653i$	$\pm 10,9957 \pm 0,0546i$	$\pm 14,1373 \pm 0,047i$
	$\bar{\Omega}_n^{(3)}$	$-12,1511 \pm 195,2596i$	$-3,7798 \pm 395,7701i$	$-2,0469 \pm 512,457i$	$-1,3381 \pm 599,2435i$	$-0,9558 \pm 668,974i$
	y_n	$\pm 3,8413$	$\pm 7,0332$	$\pm 10,1989$	$\pm 13,3569$	$\pm 16,5115$
0,1	$\bar{\Omega}_n^{(1)}$	$-38,4482$	$-70,3321$	$-101,989$	$-133,569$	$-165,115$
	$\bar{\Omega}_n^{(2)}$	$-9,1832 \cdot 10^{-5} \pm 1,95903i$	$-1,5540 \cdot 10^{-7} \pm 2,6520i$	$-2,76 \cdot 10^{-10} \pm 3,194i$	$-5,0 \cdot 10^{-13} \pm 3,6547i$	$-9,7 \cdot 10^{-16} \pm 4,06i$
	z_n	$\pm 3,1403 \pm 0,1002i$	$\pm 6,2817 \pm 0,1377i$	$\pm 9,4231 \pm 0,1704i$	$\pm 12,5645 \pm 0,2003i$	$\pm 15,706 \pm 0,2285i$
	$\bar{\Omega}_n^{(3)}$	$-6,0503 \pm 314,5673i$	$-5,0527 \pm 459,2408i$	$-4,683 \pm 558,4842i$	$-4,4323 \pm 635,7861i$	$-4,231 \pm 699,30i$
	y_n	$\pm 3,8321$	$\pm 7,0163$	$\pm 10,1745$	$\pm 13,325$	$\pm 16,4723$
	$\bar{\Omega}_n^{(1)}$	$-7,6705$	$-14,0326$	$-20,349$	$-26,65$	$-32,9446$
0,5	$\bar{\Omega}_n^{(2)}$	$-4,403 \cdot 10^{-4} \pm 1,9568i$	$-7,7717 \cdot 10^{-7} \pm 2,6488i$	$-1,42 \cdot 10^{-9} \pm 3,1897i$	$2,62 \cdot 10^{-12} \pm 3,6503i$	$-4,86 \cdot 10^{-15} \pm 4,059i$
	z_n	$\pm 3,1415 \pm 0,01998i$	$\pm 6,2831 \pm 0,0274i$	$\pm 9,4247 \pm 0,0338i$	$\pm 12,5663 \pm 0,0395i$	$\pm 15,7079 \pm 0,045i$
	$\bar{\Omega}_n^{(3)}$	$-1,2063 \pm 314,5701i$	$-1,0053 \pm 459,255i$	$-0,9289 \pm 558,498i$	$-0,874 \pm 635,7995i$	$-0,8313 \pm 669,314i$

S_n — некоторая обобщенная координата; φ_n^* — потенциал смещений, комплексно-сопряженный с потенциалом φ_n .

Приведенный анализ решения задачи указывает на существование двух спектров комплексных чисел, описывающих низкочастотные колебания свободной поверхности жидкости и высокочастотные колебания упругой оболочки с жидкостью.

Представленный метод решения задачи не выявляет механической связи обобщенных координат, отвечающих спектрам $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$ и $\Lambda^{(3)}$. Поэтому колебания, происходящие с частотами $\bar{\Omega}_n^{(1)}$, $\bar{\Omega}_n^{(2)}$, $\bar{\Omega}_n^{(3)}$ можно рассматривать как главные колебания с обобщенной координатой $S_n(t)$, отвечающей одному из спектров. Составим выражения для m_{np} , C_{np} и b_{np} , отвечающих свободным колебаниям системы с частотам $\bar{\Omega}_n^{(3)}$. Тогда потенциал скоростей при колебаниях по n -му тону может быть записан в виде

$$\varphi_n^{(3)} = I_0\left(z_n \frac{r}{r_0}\right) \sin z_n x,$$

а параметры m_{np} , C_{np} и b_{np} — формулами

$$m_{np} = 2\pi\rho \int_0^{r_0} \int_{-H}^0 \frac{z_n z_n^*}{r_0^2} \left(I_1\left(z_n \frac{r}{r_0}\right) I_1\left(z_n^* \frac{r}{r_0}\right) \sin\left(z_n \frac{x}{r_0}\right) \sin\left(z_n^* \frac{x}{r_0}\right) + \right. \\ \left. + I_0\left(z_n \frac{r}{r_0}\right) I_0\left(z_n^* \frac{r}{r_0}\right) \cos\left(z_n \frac{x}{r_0}\right) \cos\left(z_n^* \frac{x}{r_0}\right) \right) dx dr; \\ b_{np} = 2\pi\gamma\rho \int_0^{r_0} \frac{z_n z_n^*}{r_0^2} I_0\left(z_n \frac{r}{r_0}\right) I_0\left(z_n^* \frac{r}{r_0}\right) \cos\left(z_n \frac{H}{r_0}\right) \cos\left(z_n^* \frac{H}{r_0}\right) r dr; \quad (36)$$

$$C_{np} = 2\pi \frac{hE}{r_0} \int_{-H}^0 \frac{z_n z_n^*}{r_0^2} I_1\left(z_n\right) I_1\left(z_n^*\right) \sin\left(z_n \frac{x}{r_0}\right) \sin\left(z_n^* \frac{x}{r_0}\right) dx,$$

где z_n^* — число, комплексно-сопряженное с z_n .

Подставим выражения для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции в уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_n} - \frac{\partial T}{\partial S_n} = - \frac{\partial \Pi}{\partial S_n} + Q_\phi,$$

где $Q_\phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$ — обобщенная сила.

В результате получаем уравнения движения n -го осциллятора, отражающего свободные колебания рассматриваемой сложной механической системы,

$$\ddot{S}_n + 2n\dot{S}_n + \omega_n^2 S_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $2n = \frac{b_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}$; $\omega_n^2 = \frac{C_{\text{пр}}}{M_{\text{пр}}}$; n, ω_n — коэффициент затухания и собственная частота колебаний системы “упругая обечайка–жидкость–заборное устройство”.

Для получения численной оценки влияния заборного устройства (в виде перфорированного жесткого дна) на осесимметричные колебания упругой обечайки с жидкостью положим $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Н/м², $H = 9$ м, $h = 2,1 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\rho_{\text{об}} = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Вычислим интегралы (36) и определим коэффициент затухания n , частоту ω_n и логарифмический декремент δ_n , отвечающие первому тону главных колебаний. В результате получаем $n = 3,443$ с⁻¹, $\omega = 95,3205$ с⁻¹, $\delta = 0,22695$.

Сравним полученные оценки коэффициентов n и δ с приведенными в литературе. Для вязкой жидкости, частично заполняющей жесткий цилиндрический бак, определяем коэффициент затухания n , частоту ω_n и логарифмический декремент δ по формулам, полученным Ф.Л. Чернуоусько [9]. Для осесимметричных колебаний имеем

$$A_{0n} = \frac{\mu_{0n}^2}{a^2} \left[\frac{1}{\mu_{0n}} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_{0n} H}{a} \right) + \frac{1 - H/a}{\operatorname{ch}^2(\mu_{0n} H/a)} \right],$$

$$n = \operatorname{Re} \lambda_{0n} = -\frac{\nu^{1/2} A_{0n}}{2\sqrt{2}\omega_{0n}^{3/2}}, \quad \omega_{0n}^2 = g \frac{\mu_{0n}}{a} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_{0n} H}{a} \right).$$

Подставив в приведенные формулы $\nu = 1,79 \cdot 10^{-6}$ м²/с (вода), $\mu_{01} = 3,8317$, получаем $n = 0,0011712$ с⁻¹, $\omega = 6,130985$ с⁻¹, $\delta = 1,20027 \cdot 10^{-3}$.

В работе А.А. Пожалостина [10] для первого тона осесимметричных колебаний упругого бака, частично наполненного несжимаемой вязкой жидкостью (водой), были получены коэффициент затухания и декремент колебаний $n = 0,143$ с⁻¹ и $\delta = 0,0145$.

Приведенные значения n и δ оказываются недостаточными для обеспечения устойчивости движения объекта с жидкостью. На практике используют конструкционное демпфирование с помощью кольцевых или радиальных ребр, значительно увеличивающих коэффициенты n и δ .

Используя формулы работы Г.Н. Микишева [11], можно показать, что эффект затухания упругих осесимметричных колебаний оболочки с жидкостью при наличии заборного устройства, содержащего перфорированную пластину, может быть сравним с эффектом затухания волновых движений свободной поверхности жидкости при наличии кольцевых ребер в жестком баке.

Вывод. Приведенные численные результаты и анализ осесимметричных колебаний рассматриваемой механической системы показывают, что необходимо принимать во внимание дополнительный эффект конструкции заборного устройства на частотах колебаний упругой обечайки с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П о ж а л о с т и н А. А. К теории собственных малых осесимметричных колебаний упругих баков, частично заполненных жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Докл. 1-го Всес. симп. – Новосибирск, 1970. – С. 153–164.
2. П о ж а л о с т и н А. А. Свободные колебания жидкости в жестком круговом цилиндрическом сосуде // Изв. вузов. – 1963. – С. 25–32.
3. П о ж а л о с т и н А. А. Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью // Инж. журнал МТТ. – 1966. – № 5. – С. 157–159.
4. Б е л я е в Н. М. Расчет пневмогидравлических систем ракет. – М.: Машиностроение, 1983. – 219 с.
5. К о л е с н и к о в К. С. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 2003. – 520 с.
6. Ш м а к о в В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Изв. АН СССР, ОТН. Сер. “Механика и машиностроение”. – 1964. – № 1.
7. Б а л а к и р е в Ю. Г. Влияние переменной толщины оболочки на частоты и приведенные массы осесимметричных колебаний упругого резервуара с жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Докл. 1-го Всес. симп. – Новосибирск, 1970. – С. 5–15.
8. Ш к л я р ч у к Ф. Н. Осесимметричные колебания жидкости внутри упругой цилиндрической оболочки с упругим дном // Изв. вузов. Сер. “Авиационная техника”. – 1965. – № 4.
9. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. – ВЦ СССР, 1968. – 230 с.
10. П о ж а л о с т и н А. А., П а н ш и н а А. В. Приближенный метод определения логарифмического декремента для малых колебаний упругого сосуда, заполненного жидкостью // Сб. стат., посвящ. 125-летию кафедры теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана. – С. 199–204.
11. М и к и ш е в Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.

Статья поступила в редакцию 26.06.2007

Александр Николаевич Темнов родился в 1945 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. Доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 20 научных работ в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

A.N. Temnov (b. 1945) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of mechanics of liquids and gases and rocket and space technology.

У.Тэйн родился в 1975 г., окончил магистратуру МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004 г. Аспирант кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители МГТУ им. Н.Э. Баумана”. Специализируется в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

U. Tane (b. 1975) graduated from the Bauman Moscow State Technical University (master’s degree) in 2004. Post-graduate of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in mechanics of liquids and gases and rocket and space technology.