

**ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО
ТЕПЛООБМЕНА В МНОГОСЛОЙНЫХ
РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ**

Приведена постановка и решение задачи нестационарного радиационно-кондуктивного теплообмена для спектрально-селективной многослойной поглощающей, излучающей и рассеивающей среды. Рассмотрены практически важные приложения теории — воздействие инфракрасного излучения на биологические объекты и температурное состояние снежного покрова.

Свойство частичной прозрачности (полупрозрачности) в некоторых областях спектра электромагнитного излучения присуще практически всем природным и техническим средам класса диэлектриков или полупроводников [1–3]. Неоднородность таких сред в зависимости от соотношения масштаба неоднородностей и длины волны излучения обуславливает рассеяние излучения. Для описания радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачных рассеивающих средах в предположении отсутствия разрывов (приближение сплошной среды) используется уравнение энергии

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{q}_T + \vec{q}_R) = 0, \quad (1)$$

где T — температура; ρ — плотность; c_p — теплоемкость; $\vec{q}_T = -\Lambda \nabla T$ — вектор кондуктивного теплового потока, Λ — коэффициент теплопроводности; \vec{q}_R — вектор радиационного теплового потока, определяемый соотношением

$$\vec{q}_R = \int_{\lambda} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\vec{l}) \cdot \vec{l} d\omega. \quad (2)$$

Спектральная интенсивность излучения $I_{\lambda}(\vec{l})$ по направлению вектора \vec{l} определяется из интегродифференциального уравнения переноса излучения [3, 4]

$$\frac{dI_{\lambda}(\vec{l})}{dl} = -(\varkappa_{\lambda} + \sigma_{\lambda})I_{\lambda}(\vec{l}) + \varkappa_{\lambda}B_{0\lambda}(T) + \frac{\sigma_{\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} I_{\lambda}(\vec{l}') \widehat{\rho}(\vec{l}, \vec{l}') d\omega'; \quad (3)$$

интегрирование по λ в соотношении (2) производится по спектральной области частичной прозрачности среды; $B_{0\lambda}(T)$ — спектральная функция излучения Планка.

При таком (феноменологическом) подходе оптические свойства среды, непосредственно связанные с переносом энергии излучением, описываются свойствами *элементарного объема* [5–7] — коэффициентами поглощения κ_λ , рассеяния σ_λ и индикатрисой рассеяния $\widehat{\rho}(\vec{l}, \vec{l}') \equiv \widehat{\rho}(\beta)$, где $\beta = \arccos(\vec{l}, \vec{l}')$ — угол рассеяния; ω — телесный угол.

Система уравнений (1)–(3) в общем случае — сопряженная, причем сопряженность может быть обусловлена как взаимовлиянием полей температуры и излучения посредством функции излучения Планка $B_{0\lambda}(T)$, так и изменением оптических свойств среды в процессах нагрева (охлаждения), или же обоими факторами. Решение такой сопряженной системы уравнений представляет определенные трудности даже для квазиоднородных (однослойных) сред [3–5, 8].

Задача существенно усложняется, если среда слоистая, т.е. имеются разрывы физических свойств без нарушения механической сплошности. Слоистость структуры среды может быть как естественной, так и образовываться с развитием процесса теплопереноса во времени. Существует большое число примеров полупрозрачных рассеивающих слоистых сред, и анализ процессов теплопереноса в них — актуальная задача.

Полупрозрачные слоистые технические среды. Простейший пример таких сред — это элементы конструкций в виде слоев разнородных полупрозрачных материалов, например, стеклопластик [9–11] и пенополимер [12] или волокнит [13], собранные в пакет. Такие слоистые системы используются в конструкциях сосудов для хранения криогенных жидкостей.

Многослойные системы из рассеивающих материалов могут выполнять роль эффективной теплозащиты технических устройств, потенциально подверженных интенсивному нагреву излучением в экстремальных условиях природных или техногенных катастроф, сопровождающихся пожарами [14].

Отражающая способность слоя рассеивающего материала зависит от его толщины, и в некоторых случаях при достаточной толщине такой слой может выполнять функции эффективной теплозащиты для космических аппаратов при входе в атмосферу со сверхорбитальными скоростями [15–17]. Однако слоистость тепозащитного покрытия может возникать и в процессе нагрева первоначально квазиоднородного материала. Так при аэродинамическом нагреве стеклопластика образуется трехслойная структура, состоящая из исходного (в общем случае полупрозрачного) слоя, непрозрачного карбонизованного слоя и полупрозрачной пленки расплава наполнителя, насыщенной газообразными продуктами разрушения (рис. 1), эффективно рассеивающей излучение. Впервые задача сопряженного теплообмена в такой постановке

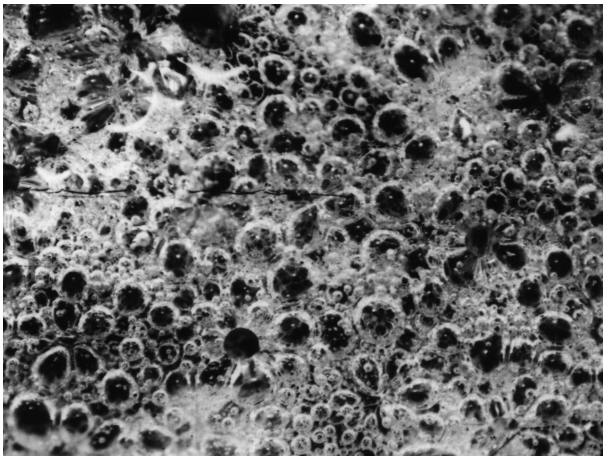


Рис. 1. Внешняя поверхность стеклопластика в условиях высокоинтенсивного аэродинамического нагрева

рассмотрена в работах [18, 19], в которых внимание акцентировано именно на роли рассеяния, как на факторе эффективности тепловой защиты. Многослойные рассеивающие системы образуются при нанесении плазменных покрытий на основе тугоплавких оксидов [20] для защиты элементов конструкций, работающих в условиях интенсивного нагрева и в агрессивных средах.

Новым и перспективным прикладным аспектом рассматриваемой проблемы является использование полупрозрачных рассеивающих покрытий в камерах двигателей внутреннего сгорания (ДВС) [21, 22]. Показано, что, выбирая оптимальные оптические свойства рассеивающего покрытия, можно оптимизировать температурный режим камеры сгорания (КС) для повышения КПД и снижения содержания токсичных компонентов в продуктах сгорания, попадающих в окружающую среду [23].

Полупрозрачные природные слоистые среды. Явление полупрозрачности природных сред играет исключительно важную роль в процессах взаимодействия растительных и биологических объектов с излучением естественного источника — Солнца [24] — и искусственных источников излучения разных типов, применяемых как для активации биологических процессов [25], так и при технологической обработке органических продуктов [26]. Растительные и биологические объекты имеют сложную слоистую структуру с различающимися оптическими свойствами слоев, что необходимо учитывать при расчетах процессов теплообмена. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты экспериментальных исследований [27] оптических характеристик слоя кожи, подкожного жирового слоя и мышечной ткани, иллюстрирующие факт существенной роли рассеяния такой сложной системы, как биологическая ткань живого организма.

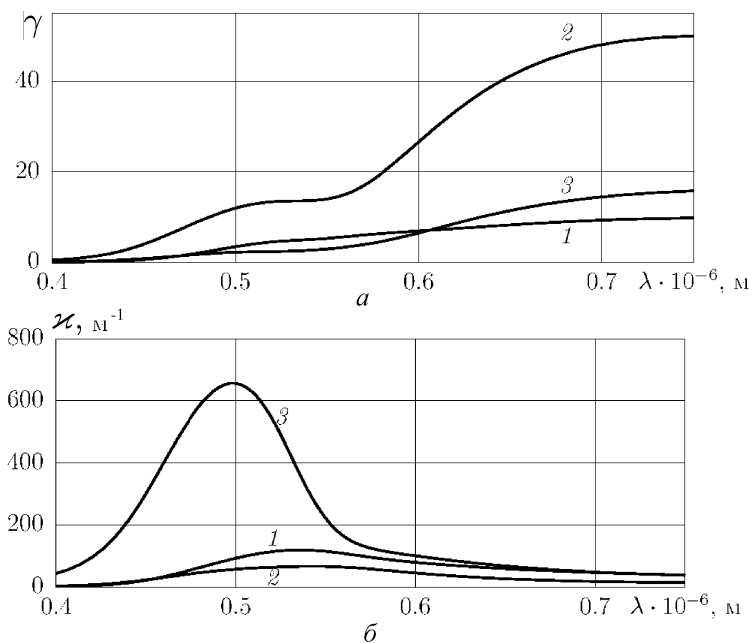


Рис. 2. Оптические свойства биологических тканей — коэффициенты удельного рассеяния (а) и поглощения (б):

1 — кожа; 2 — подкожный жир; 3 — мышечная ткань

Кроме слоистости объектов в исходном состоянии, слоистая структура образуется при технологической обработке объектов, сопровождающейся обезвоживанием, например при сушке: постепенное удаление влаги приводит к образованию высокопористого слоя с резко различающимися значениями показателя преломления твердой фазы продукта (твердого каркаса или же дисперсных частиц) и окружающей дисперсионной среды — воздуха, что обуславливает сильные рассеивающие свойства. Слоистую структуру имеют и такие природные образования, как снежные и ледяные покровы, температурное состояние которых сильно влияет на климат [28, 29].

Эти и многие другие многочисленные примеры демонстрируют актуальность разработки методов расчета теплообмена в полупрозрачных слоистых рассеивающих средах. Частные постановки такой задачи рассматривались в работах [30, 31], однако чаще всего это сводилось к анализу только теплообмена излучением или несопряженного теплообмена без учета взаимовлияния полей температуры и излучения, или ограничивалось двухслойными системами.

В настоящей работе приведены постановка и метод решения задачи сопряженного радиационно-кондуктивного теплообмена в многослойной системе с произвольными оптическими свойствами, которые применимы и в общем случае тепломассопереноса с произвольным числом сопрягаемых полей температуры, излучения и объемного те-

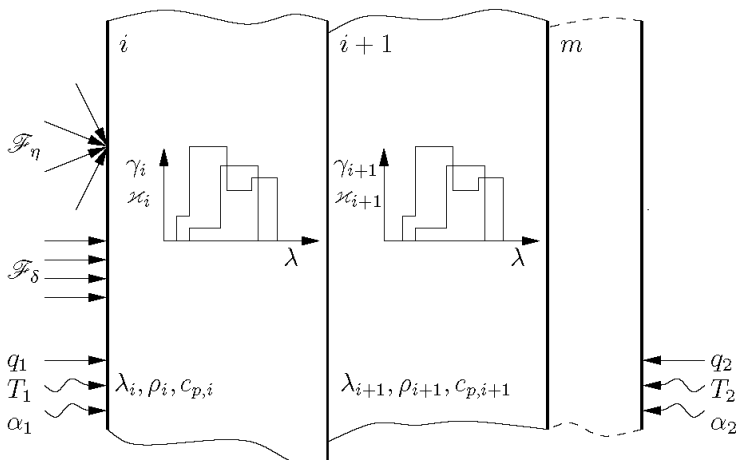


Рис. 3. Физическая модель многослойной системы и внешнего теплового нагружения

пловыделения произвольной природы, например, при химических реакциях или поглощении ионизирующего излучения. В основу предлагаемого метода положено аналитическое решение уравнения переноса излучения методом моментов [32] для системы произвольного числа рассеивающих слоев с учетом собственного излучения [33] и решение уравнения энергии методом конечных элементов.

Модель теплопередачи. Представим систему конечным числом слоев с заданными оптическими и теплофизическими свойствами (рис. 3). Температурное поле в каждом i -м слое описывается дифференциальным уравнением теплопроводности

$$c_{p,i}\rho_i \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t} = \Lambda_i \frac{\partial^2 T_i(x,t)}{\partial x^2} + q_{v,i}(x,t), \quad (4)$$

а m уравнений (по числу слоев) образуют систему, которую необходимо дополнить начальными условиями

$$T_i(0,x) = T_{i,0}(x) \quad (5)$$

и граничными условиями

$$\Lambda_1 \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mathcal{F}\epsilon_1 + q_1 + \alpha_1 [T_1(0,t) - T_{cp,1}] - \sigma_0 T_1^4 \epsilon_1; \quad (6)$$

$$-\Lambda_m \frac{\partial T_m(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=h} = q_2 + \alpha_2 [T_m(h,t) - T_{cp,2}] - \sigma_0 T_2^4 \epsilon_m, \quad (7)$$

а также условиями сопряжения на границах слоев

$$\begin{aligned} & \left(\Lambda_i \frac{\partial T_i(x,t)}{\partial x} - \sigma_0 T_i^4 \epsilon_i \right)_{x=h} + q_{r,i+1}^0 \epsilon_i = \\ & = \left(\Lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x,t)}{\partial x} - \sigma_0 T_{i+1}^4 \epsilon_{i+1} \right)_{x=0} + q_{r,i}^* \epsilon_{i+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ρ_i , $c_{p,i}$, Λ_i — плотность, теплоемкость и теплопроводность слоя соответственно; $\mathcal{F}\epsilon_\infty$ — поверхностный поток теплоты, подводимый к стенке вследствие поглощения падающего излучения в области непрозрачности, q_1 , q_2 — поверхностный поток теплоты, подводимый к стенке вследствие теплопроводности; ϵ_1 , ϵ_2 — излучательная способность в области непрозрачности (если этого нет, то $\epsilon = 0$); $T_{cp,1}$, $T_{cp,2}$ и α_1 , α_2 — температуры окружающей среды и коэффициенты теплоотдачи; $q_{r,i}^0$ и $q_{r,i}^*$ — плотность потока результирующего излучения в области полупрозрачности на границах соответствующего слоя; плотность потока излучения связана с интенсивностью излучения выражением

$$q_{r,i}(x) = \int_{4\pi} I_i(\vartheta, x) \cos \vartheta d\omega; \quad (9)$$

$q_v(x, t)$ — объемная плотность тепловыделения из-за переноса энергии излучением, связанная с результирующим потоком излучения соотношением

$$q_{v,i}(x, t) = \frac{\partial q_{r,i}(x, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Модель переноса излучения. Многослойную систему, как и в работе [33], представим конечным числом слоев $i = 1, 2, \dots, m$, в каждом из которых соблюдается постоянство спектрального распределения удельного коэффициента рассеяния $\gamma_i(\lambda) = \sigma_i(\lambda)/\varkappa_i(\lambda)$ и индикатрисы рассеяния $\rho_{i,\lambda}(\beta)$, а для коэффициента поглощения $\varkappa_i(\lambda)$ допускается произвольный закон его изменения по толщине ($\sigma_i(\lambda)$ — спектральный коэффициент рассеяния). Ввиду спектральной зависимости оптических характеристик примем следующую групповую спектральную модель системы (рис. 4).

Будем считать, что для любой оптической характеристики $f_{j,i}$ i -го слоя соблюдается постоянство ее значения на множестве полос длин волн $\Delta\lambda_i^j = \lambda_i^{j+1} - \lambda_i^j$, $j \in 1, 2 \dots k_i$, т.е. $f_i^j(\lambda) = \text{const}$ для $\lambda \in \Delta\lambda_i^j$. Тогда для расчета интегральных по спектру характеристик поля излучения вводится общая для всех слоев шкала (решетка) длин волн $\lambda_p \in (\lambda_1^1 \dots \lambda_1^{k_1} \cup \lambda_2^1 \dots \lambda_2^{k_2} \cup \dots \cup \lambda_m^1 \dots \lambda_m^{k_m})$ и оптические характеристики считаются постоянными в полосе $\Delta\lambda^p = \lambda^{p+1} - \lambda^p$ для каждого слоя: $\gamma_i^p(\lambda) = \text{const}$, $\bar{\rho}_i^p(\beta, \lambda) = \text{const}$ для $\lambda \in \Delta\lambda^p$.

Интегрируя уравнение (3) для плоского слоя в пределах каждой из спектральных полос $\Delta\lambda^p$, перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{I_i^p(\tau_i, \vartheta)}{d\tau_i} = & -(1 + \gamma_i^p) I_i^p(\tau_i, \vartheta) + \frac{\gamma_i^p}{4\pi} \int_{4\pi} \bar{\rho}_i(\beta) I_i^p(\tau_i, \vartheta') d\omega' + \\ & + (n_i^p)^2 B[T(\tau_i)] + \frac{\gamma_i^p}{4\pi} \mathcal{F}_{\delta,i} e^{-\varepsilon_i^p \tau_i} \bar{\rho}_i^p(\vartheta, \vartheta') \delta(0 - \vartheta) \delta(\varphi), \quad (11) \end{aligned}$$

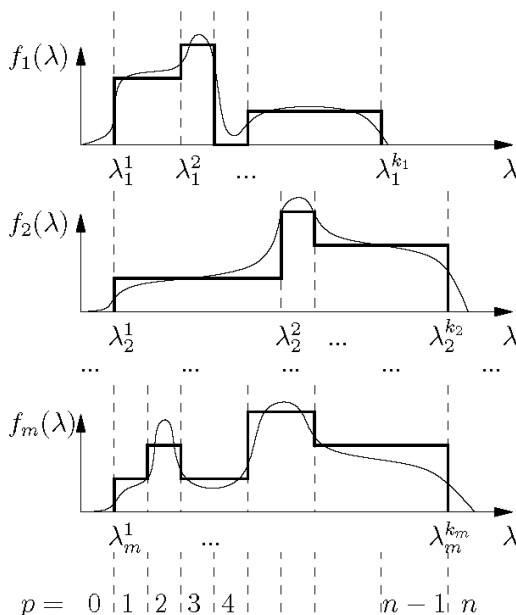


Рис. 4. Групповая спектральная модель оптических свойств многослойной системы

где $I_i^p = \int_{\lambda^p}^{\lambda^{p+1}} I_i d\lambda$; $B_k^*[T] = \int_{\lambda^p}^{\lambda^{p+1}} B[T(\cdot)] d\lambda = Q(\lambda_{k=1}) \dots$;

$$q_{r,i}(x) = \sum_{p=0}^n q_{r,i}^p(x) \quad (12)$$

(далее спектральный индекс p будет опущен).

С каждым i -м слоем свяжем собственную систему координат $x_{i,j}$. Распространение излучения в i -м слое описывается уравнением переноса излучения:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{I_i(\tau_i, \vartheta)}{d\tau_i} = & -(1 + \gamma_i) I_i(\tau_i, \vartheta) + \frac{\gamma_i}{4\pi} \int_{4\pi} \bar{\rho}_i(\beta) I_i(\tau_i, \vartheta') d\omega' + \\ & + n_i^2 B[T(\tau_i)] + \frac{\gamma_i}{4\pi} \mathcal{F}_{\delta,i} e^{-\varepsilon_i \tau_i} \bar{\rho}_i(\vartheta, \vartheta') \delta(0 - \vartheta) \delta(\varphi), \quad (13) \end{aligned}$$

где $I_i(\tau_i, \vartheta)$ — интенсивность диффузного излучения на оптической глубине $\tau_i = \int_0^x \kappa_i dx$ в направлении, составляющем угол ϑ с осью линейной координаты x ; ϑ, ϑ' — полярные углы падающего и рассеянного излучения; β — угол между направлениями лучей, задаваемых углами ϑ и ϑ' (угол рассеяния); φ — азимутальный угол (предполагается выполнение условия азимутальной симметрии); $B[T(\tau_i)]$ — функция Планка; $T(\tau_i)$ — локальная температура; $\varepsilon_i = 1 + \gamma_i$; $\delta(\dots)$ — функция Дирака; n_i — показатель преломления; $\mathcal{F}_{\delta,i}$ — плотность потока направленного излучения на границе i -го

слоя, определяемая соотношением

$$\mathcal{F}_{\delta,i} = \mathcal{F}_0 \eta_\delta \prod_i (1 - r_{\delta,i}^0) k_{\delta,i}^0 e^{-\varepsilon_{i-1} \tau_{i-1}^*}, \quad (14)$$

где \mathcal{F}_0 — плотность потока падающего излучения; η_δ — доля направленной составляющей во внешнем потоке; $r_{\delta,i}^0$ — отражательная способность (коэффициент отражения) для направленной составляющей на границе входа излучения в i -й слой; $k_{\delta,i}^0$ — доля направленного излучения, пропущенного граничной поверхностью без рассеяния; $\tau_i^* = \int_0^{h_i} \kappa_i dx$ — оптическая толщина слоя.

При такой форме записи не учитывается направленное излучение, отраженное от граничной поверхности на выходе из слоя, так как его вклад для поглощающих сред и реальных характеристик отражения граничных поверхностей незначителен.

Уравнение (13) дополняется граничными условиями и условиями сопряжения из работы [33].

Для решения сопряженной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена (4)–(13) в многослойной системе использован метод итераций между полем плотности потока результирующего излучения, определяемым посредством решения уравнения переноса излучения, и полем температуры.

Расчет поля излучения методом моментов [32] сводится к решению системы дифференциальных уравнений относительно моментов интенсивности излучения:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{n+1,i}(\tau_i)}{d\tau_i} = & -(1 + \gamma)M_{n,i}(\tau_i) + \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)} B^*[T(\tau_i)] - \\ & - \frac{\gamma_i}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{C_n^k C_k^{k/2}}{2^k} \Gamma_{n,k,i} \sum_{r=0}^{k/2} (-1)^r C_{k/2}^r M_{n-k+2,r,i}(\tau_i) + \\ & + \frac{\gamma_i}{2} \mathcal{F}_{\delta,i} \Gamma_{n,0,i} e^{-\mathcal{F}_i \tau_i}; \quad (15) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N \mathcal{L}_{j,N} M_{N-j,i}(\tau_i) = 0, \quad (16)$$

где $M_{n,i}(\tau_i) = \int_{4\pi} I(\tau_i; \vartheta) \cos^n \vartheta d\omega$ — момент n -го порядка, $\Gamma_{n,k,i} = \int_0^\pi \bar{\rho}_i(\beta) \sin^{n+1} \beta \cos^{n-k} \beta d\beta$; C_n^k — биномиальные коэффициенты; $B^*[T(\tau_i)] = 4n_i^2 B[T(\tau_i)]$; $\mathcal{L}_{j,N}$ — коэффициенты полиномов Лежандра

N -го порядка; N — порядок приближения. Формулирование замыкающего условия в виде (16) эквивалентно представлению интенсивности излучения рядом:

$$I_i(\mu; \tau_i) = \sum_{j=1}^N a_{j,i}(\tau_i) \mu^{N-j}, \quad (17)$$

где коэффициенты $a_{j,i}(\tau_i)$ связаны с моментами интенсивности излучения системой уравнений

$$\frac{1}{2\pi} M_{k,i}(\tau_i) = \sum_{j=1}^N \frac{1 + (-1)^{N-j+k}}{N-j+k+1} a_{j,i}(\tau_i). \quad (18)$$

Граничные условия и условия сопряжения преобразуются к следующему виду [33]:

$$\tau_1=0 : \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{N-j+W+1} - (-1)^{N-j} R_{N-j,W,1}^0 \right\} \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,1}^0 = P_{W,1}^0; \quad (19)$$

$$\tau_m = \tau_m^* : \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{(-1)^{N-j}}{N-j+W+1} - R_{N-j,W,m}^* \right\} \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,m}^* = P_{W,m}^*; \quad (20)$$

$$\tau_i = \tau_i^* = \tau_{i+1}^0; \quad i = 1, 2, \dots, m-1 :$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{(-1)^{N-j}}{N-j+W+1} - R_{N-j,W,i}^* \right\} \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,i}^* = \\ = \sum_{j=1}^N (-1)^{N-j} Q_{N-j,W,i}^* \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,i+1}^0 + R_{W,i}^* P_{\delta,i}^*; \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{N-j+W+1} - (-1)^{N-j} R_{N-j,W,i+1}^0 \right\} \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,i+1}^0 = \\ = \sum_{j=1}^N Q_{N-j,W,i+1}^0 \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0} a_{j,i}^* + Q_{W,i}^* P_{\delta,i}^*. \quad (22) \end{aligned}$$

В выражениях (19)–(22) введены следующие обозначения для интегральных оптических характеристик граничных поверхностей:

$$R_{N-j,W,i} = \int_0^1 \mu^W d\mu \int_0^1 r_i(\mu'; \mu) (\mu')^{N-j} d\mu';$$

$$\begin{aligned}
Q_{N-j,W,i} &= \int_0^1 \mu^W d\mu \int_0^1 q_i(\mu'; \mu) (\mu')^{N-j} d\mu'; \\
R_{W,i} &= \int_0^1 r_i(\mu'; 0) (\mu')^W d\mu'; \quad Q_{W,i} = \int_0^1 q_i(\mu'; 0) (\mu')^W d\mu'; \\
P_{\delta,i}^* &= \eta_\delta (1 - k_{\delta,i}^*) \prod_i k_{\delta,i}^0 \prod_i (1 - r_{\delta,i}^0) \prod_i e^{-\varepsilon_i \tau_i^*}; \\
P_{W,1} &= (1 - \eta_\delta) \psi_0 \sum_{j=1}^s b_j^0 Q_{s-j,W,1}^0 + \eta_\delta (1 - k_{\delta,1}^0 Q_{W,1}^0); \\
P_{W,m}^* &= R_{W,m}^* P_{\delta,m}^*.
\end{aligned}$$

В двухчленном приближении метода моментов ($N = 2$), обеспечивающем приемлемую для инженерной практики 5 %-ную точность расчетов интегральных характеристик поля излучения [32], решение системы уравнений (15) и (16) для каждого i -го слоя имеет вид:

$$\begin{aligned}
M_{0,i}(\tau_i) &= \alpha_i \left\{ e^{-\alpha_i \tau_i} \int_0^{\tau_i} \frac{B_i^*(\tau'_i)}{2} e^{\alpha_i \tau'_i} d\tau'_i - e^{\alpha_i \tau_i} \int_0^{\tau_i} \frac{B_i^*(\tau'_i)}{2} e^{-\alpha_i \tau'_i} d\tau'_i - \right. \\
&\quad \left. - E_{1,i} e^{\alpha_i \tau_i} + E_{2,i} e^{-\alpha_i \tau_i} \right\} + D_{0,i} \mathcal{F}_{\delta,i} e^{-\delta_i \tau_i};
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
M_{1,i}(\tau_i) &= e^{\alpha_i \tau_i} \int_0^{\tau_i} \frac{B_i^*(\tau'_i)}{2} e^{-\alpha_i \tau'_i} d\tau'_i + e^{-\alpha_i \tau_i} \int_0^{\tau_i} \frac{B_i^*(\tau'_i)}{2} e^{\alpha_i \tau'_i} d\tau'_i + \\
&\quad + E_{1,i} e^{\alpha_i \tau_i} + E_{2,i} e^{-\alpha_i \tau_i} + D_{1,i} \mathcal{F}_{\delta,i} e^{-\delta_i \tau_i},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{0,i} &= -\gamma_i (2\alpha_i^2 + 3\mathcal{E}_i \Gamma_{1,0,i}) / 2(\mathcal{E}_i^2 - \alpha_i^2); \\
D_{1,i} &= -\gamma_i (2\mathcal{E}_i + 3\Gamma_{1,0,i}) / 2(\mathcal{E}_i^2 - \alpha_i^2); \\
\alpha_i &= \sqrt{3\mathcal{E}_i}; \quad \mathcal{E}_i = (1 + \gamma_i).
\end{aligned}$$

Для m -слойной системы решения (23) содержат $2m$ констант интегрирования, которые определяются из граничных условий (19)–(20) и $(2m - 2)$ условий сопряжения (21)–(22). При этом значение целочисленного индекса следует принять $W = 1$, что соответствует выполнению баланса потоков излучения на границах слоев. Используя соотношения (18), граничные и условия сопряжения (19)–(22) и выражения для моментов интенсивности излучения (23), после преобразования получаем систему линейных алгебраических уравнений для

определения $2m$ констант интегрирования $E_{1,i}$ и $E_{2,i}$:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ A_{q-3} \\ A_{q-2} \\ A_{q-1} \\ A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{53} & u_{54} & u_{55} & u_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{q-3,q-3} & u_{q-3,q-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{q-2,q-3} & u_{q-2,q-2} & u_{q-2,q-1} & u_{q-2,q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{q-1,q-3} & u_{q-1,q-2} & u_{q-1,q-1} & u_{q-1,q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{q,q-1} & u_{q,q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ G_{q-3} \\ G_{q-2} \\ G_{q-1} \\ G_q \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где $q = 2m$; $E_{1,i} = A_{2i-1}$ и $E_{2,i} = A_{2i}$; $u_{s,r}$ — матрица коэффициентов $2m \times 2m$; G_r — вектор правых частей; A_s — вектор искомым констант.

Отметим, что полный поток излучения в i -м слое \mathcal{F}_i определяется потоком излучения внешнего источника и потоком рассеянного излучения:

$$\mathcal{F}_i(\tau_i) = \mathcal{F}_{\delta,i} e^{-\varepsilon_i \tau_i} + M_{1,i}(\tau_i). \quad (25)$$

Расчет поля температуры методом конечных элементов эквивалентен отысканию минимума функционала [34]:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_L \left[\lambda \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - 2 \left(q_v(x,t) - c_p \rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right) T_i(x,t) \right] dL + \\ + \left[q_1 T(x,t) + \frac{\alpha_1}{2} (T(x,t) - T_{cp,1})^2 \right]_{x=0} + \\ + \left[q_2 T(x,t) + \frac{\alpha_2}{2} (T(x,t) - T_{cp,2})^2 \right]_{x=l}. \quad (26) \end{aligned}$$

Будем использовать двухузловой одномерный конечный элемент. Применение стандартных процедур МКЭ к функционалу (26) приводит к матричному уравнению для одного конечного элемента

$$[C^{(e)}] \{\dot{U}^{(e)}\} + [k^{(e)}] \{U^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}, \quad (27)$$

где

$$[C^{(e)}] = \frac{c_p \rho L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

— матрица теплоемкости; $\{U^{(e)}\}$ — вектор узловых температур;

$$[k^{(e)}] = \frac{\Lambda}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

— матрица теплопроводности;

$$\{f^{(e)}\} = \frac{q_v L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 T_{cp,1} \\ \alpha_2 T_{cp,2} \end{Bmatrix}$$

— вектор тепловых нагрузок; c_p , ρ , Λ — теплоемкость, плотность и теплопроводность соответственно; L — длина конечного элемента; q_v — объемная плотность энерговыделения; q_1 , q_2 — тепловой поток, подводимый к границам элемента теплопроводностью.

Из локальных матриц элементов $[C^{(e)}]$, $[k^{(e)}]$, $\{f^{(e)}\}$ составляются глобальные матрицы задачи:

$$[C]\{\dot{U}\} + [k]\{U\} = \{f\}. \quad (28)$$

Расчетная область разбивается на конечные элементы таким образом, чтобы узлы элементов попадали на границы раздела слоев. Теплофизические свойства конечных элементов задаются в соответствии со свойствами слоев, которым принадлежат элементы. Члены, соответствующие граничным условиям, задаются для конечных элементов, лежащих на границе области.

Для интегрирования уравнения (28) по времени представим $\{\dot{U}\}$ на i -м временном слое центральной разностью [34]

$$\left. \frac{\partial \{U\}}{\partial t} \right|_i = \frac{\{U_{i-1}\} - \{U_{i+1}\}}{2\Delta t}. \quad (29)$$

Пренебрегая изменением вектора тепловых нагрузок в течение одного шага интегрирования, после преобразований окончательно получаем следующее матричное уравнение:

$$\left([k] - \frac{1}{\Delta t} [C] \right) \{U\}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t} [C] \{U\}_i - \{f\}. \quad (30)$$

Приведенный алгоритм расчета реализован на языке C++ и доведен до возможности пользовательского применения для решения задач радиационно-кондуктивного теплообмена из различных областей науки и техники.

Некоторые практические приложения. Воздействие инфракрасного излучения на биологические объекты. Эта задача имеет важное практическое значение для определения зон поражения при природных и техногенных катастрофах и авариях, сопровождающихся горением больших масс вещества [35, 36], и при разработке средств огнетеплозащиты.

Известно, что болевой порог человека достигается при температуре поверхности кожи $T \sim 45^\circ\text{C}$, а при $T \sim 60 \dots 65^\circ\text{C}$ происходит необратимое поражение кожи в виде ожога, что имеет место, например,

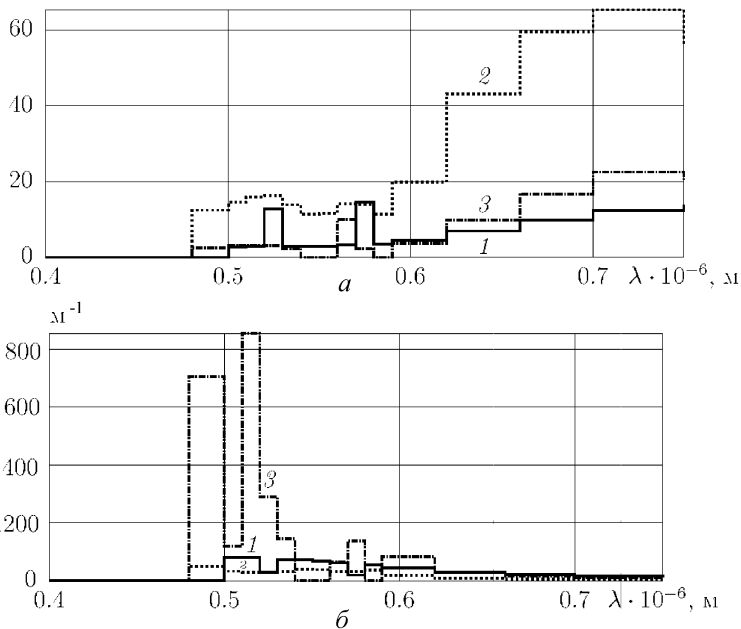


Рис. 5. Групповая модель оптических свойств многослойной системы биологических тканей:

a и b — коэффициенты удельного рассеяния γ и поглощения κ ; 1 — кожа; 2 — подкожный жир; 3 — мышечная ткань

при воздействии излучения с плотностью потока $\sim 10 \text{ кВт/м}^2$ через 10...20 с после начала воздействия [35], что может быть принято за критерий сравнения при анализе результатов расчетов.

Внешняя поверхность тела человека представляет типичную многослойную (трехслойную) систему полупрозрачных слоев, включающую кожу, подкожный жировой слой и мышечную ткань. Основываясь на полученных экспериментальных результатах (см. рис. 2), в расчетах использовали оптическую модель слоев, приведенную на рис. 5. Теплофизические свойства биологических тканей взяты из работы [25] и приведены в таблице.

Таблица

Теплофизические свойства биологических тканей

Свойства	Кожа	Жир	Мышечная ткань
Толщина h , м	0,001	0,002	0,002
Плотность ρ , кг/м ³	1000	1000	1000
Теплоемкость c_p , Дж/(кг·К)	4000	4000	4000
Теплопроводность λ , Вт/м·К	0,58	0,58	0,58

Условия нагрева и теплообмена с внешней средой приняты следующими: плотность потока падающего излучения $q = 10 \text{ кВт/м}^2$,

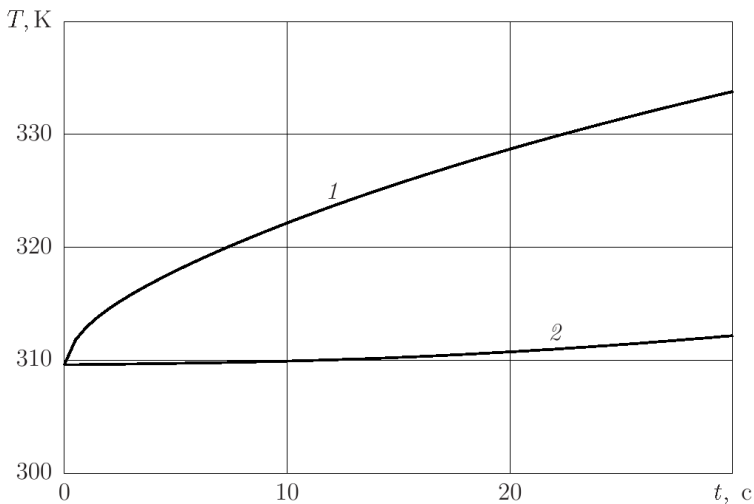


Рис. 6. Зависимость температуры внешней (нагреваемой) (1) и внутренней (2) поверхностей от времени нагрева

спектральный состав падающего излучения соответствует абсолютно черному телу с температурой 3500 К; на внешней (нагреваемой) стороне происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $T_{1cp} = 20^\circ\text{C}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ (условия свободной конвекции); на внутренней поверхности имеет место конвективный теплообмен (за счет кровотока) при $T_{2cp} = 36,6^\circ\text{C}$ и коэффициенте теплоотдачи $\alpha = 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

На рис. 6 приведены зависимости температуры на внешней и внутренней поверхностях рассматриваемой системы. Как видно из приведенных результатов, болевой порог достигается примерно через 25 с с момента начала воздействия излучения, что хорошо соответствует приведенным экспериментальным данным.

Температурное состояние снежного покрова определяет погодные и климатические условия на значительной территории земной поверхности, и с учетом проблемы глобального потепления задача расчета температурного состояния снежно-ледового покрова — типичной многослойной рассеивающей системы — имеет важное прикладное значение в целях прогнозирования климатических изменений и построения глобальных геофизических моделей.

Экспериментальные исследования температурного состояния снежного покрова проведены в высокогорных условиях Кавказа. При расчетах внешние условия нагрева и свойства среды соответствуют реальным: плотность потока солнечного излучения (черное тело при температуре 5770 К) составляет $450 \text{ Вт}/\text{м}^2$; на внешней поверхности слоя снега заданы условия естественной конвекции с внешней средой, имеющей температуру $T_{1cp} = -8^\circ\text{C}$ и коэффициент теплоотдачи $\alpha_1 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$; снежный покров толщиной $h = 1 \text{ м}$ имеет контакт

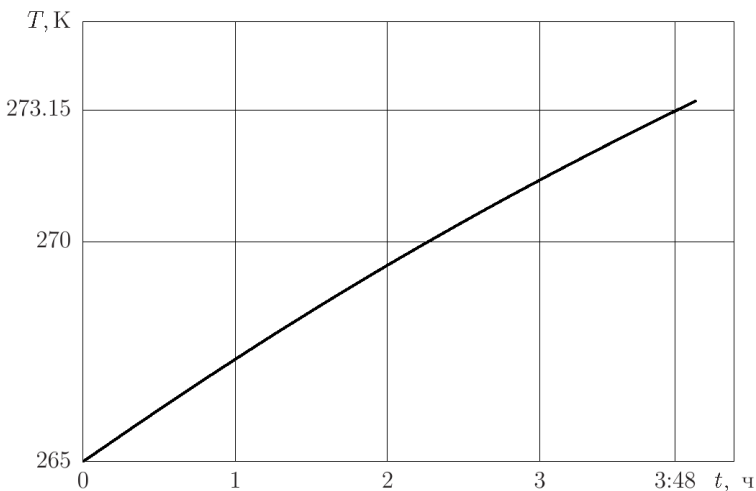


Рис. 7. Зависимость температуры в точке максимального энерговыделения в слое снега от времени нагрева

с поверхностью земли со степенью черноты $\epsilon = 1$ и температуру -8°C , т.е. предполагается тепловое равновесие со снежным покровом и полное поглощение излучения поверхностью земли. Тепло- и оптико-физические свойства снега (фирна) приняты следующими [29]: плотность $\rho = 300 \text{ кг/м}^3$; теплоемкость $C = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$; теплопроводность $\lambda = 0,36 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)}$; коэффициент поглощения $\kappa = 1 \text{ м}^{-1}$; удельный коэффициент рассеяния $\gamma = 10$. При указанных оптических свойствах с учетом направленности излучения Солнца максимум объемного тепловыделения [37] имеет место на глубине $0,15 \text{ м}$; на рис. 7 приведен график зависимости температуры в этой точке от времени нагрева, из которого следует, что температура плавления снега достигается через 14000 с ($3 \text{ ч } 48 \text{ мин}$) с момента начала воздействия излучения Солнца, что соответствует полученным экспериментальным данным.

Отметим, что проблема таяния снежно-ледяных массивов во внутренних слоях исключительно важна с точки зрения прогнозирования схода лавин, так как образование водяного слоя служит причиной нарушения сплошности (разрыв) массива и облегчает сход (скольжение) внешнего слоя, т.е. образование лавины.

Выводы. Дана общая постановка, приведены физическая и математическая модели задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в многослойной рассеивающей среде и метод ее решения. Приведены примеры, иллюстрирующие практическую важность рассмотренной задачи. Программная реализация задачи на языке C++ доведена до возможности ее использования при решении широкого круга задач радиационно-кондуктивного теплообмена в различных областях науки и техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новицкий Л. А., Степанов Б. М. Оптические свойства материалов при низких температурах. – М.: Машиностроение, 1980. – 224 с.
2. Сперанская Т. А., Таругина Л. И. Оптические свойства полимеров. – Л.: Химия, 1976. – 136 с.
3. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен. – М.: Мир, 1976. – 616 с.
4. Андрианов В. Н. Основы радиационного и сложного теплообмена. – М.: Энергия, 1972. – 463 с.
5. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1. – М.: Мир, 1981. – 280 с.
6. Розенберг Г. В. Электродинамика статистически неоднородных сред и теория переноса / В сб.: Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. – Минск: Наука и техника, 1971. – С. 159–170.
7. Барabanенков Ю. Н. Многократное рассеяние волн на ансамбле частиц и теория переноса излучения // УФН. – 1975. – Т. 117, № 1. – С. 49–78.
8. Суржиков С. Т. Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. – 544 с.
9. Долгополов В. И. Светотехнические материалы. – М.: Энергия, 1972. – 167 с.
10. Альперин В. И., Корольков Н. В., Мотавин А. В. Конструкционные стеклопластики. – М.: Химия, 1979. – 360 с.
11. Горский В. В., Товстоног В. А. Исследование оптических свойств стеклопластиков // Тр. МВТУ им. Н.Э.Баумана. – № 205. – 1976. – С. 88–93.
12. Полунин В. Л. Пенополимеры в низкотемпературной изоляции. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 192 с.
13. Харламов А. Г. Теплопроводность высокотемпературных теплоизоляторов. – М.: Атомиздат, 1979. – 100 с.
14. Елисеев В. Н., Товстоног А. В., Товстоног В. А. Разработка и сравнительный анализ огнепелозащиты для условий экстремальных ситуаций // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2005. – № 2. – С. 31–57.
15. Петерсон Д. Л., Нахтсгейм П. Р., Хоув Дж. Применение отражающих аблирующих материалов для тепелозащиты аппаратов, входящих в атмосферу планет // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – Т. 10, № 11. – С. 137–145.
16. Congdon W. Investigation of reflecting heat-shield materials for outer-planet mission / AIAA Paper. – 1974. – № 702. – С. 1–13.
17. Voles M., Ozisik M. H. Simultaneous ablation and radiation in an absorbing, emitting and isotropically scattering medium / J. Quant. Spectr. Ra. Transfer. – 1972. – № 12. – P. 839–847.
18. Горский В. В., Товстоног В. А. Теплообмен в разрушающемся материале // Изв. вузов. Сер. “Машиностроение”. – 1977. – № 1. – С. 9–14.
19. Горский В. В., Товстоног В. А. Влияние характера теплового нагружения и оптических свойств на теплообмен в разрушающемся материале // Изв. вузов. Сер. “Машиностроение”. – 1978. – № 4. – С. 87–90.
20. Кудинов В. В., Пузанов А. А., Замбржичкий А. П. Оптика плазменных покрытий. – М.: Наука, 1981. – 188 с.
21. Мерзликин В. Г., Товстоног В. А. Патент РФ № 2015361 от 30.06.2004. Теплоизолирующее покрытие камеры сгорания ДВС.
22. Merzlikin V., Gutierrez Ojeda, Sidorov O., Timonin V. New selectively absorbing and scattering heat-insulating coating of the combustion chamber for the low-heat-rejection diesel / SAE Techn. Pap. Ser. № 07M-171, 2007.

23. Мерзликін В. Г. Полупрозрачные керамики как теплоизолирующие покрытия камеры сгорания // Материалы МНТК “Поршневые и газотурбинные двигатели”, секция 2. – М.: МГТУ “МАМИ”. – 2005. – Ч. 2. – С. 43–46.
24. Рвачев В. П. Методы оптики светорассеивающих сред в физике и биологии. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1978. – 240 с.
25. Жорина Л. В., Змиевской Г. Н. Основы взаимодействия физических полей с биологическими объектами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 238 с.
26. Ильясов С. Г., Красников В. В. Физические основы инфракрасного облучения пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1978. – 360 с.
27. Товстоног В. А. Идентификация терморadiационных характеристик светорассеивающих материалов // Изв. СО АН СССР. Сер. “Технические науки”. – 1987. – Вып. 2. – С. 16–21.
28. Красс М. С., Мерзликін В. Г. Радиационная теплофизика снега и льда. – Л.: Гидрометеиздат, 1990. – 261 с.
29. Красс М. С., Геворкян С. Г., Мерзликін В. Г., Товстоног В. А. Методика расчета радиационных и температурных полей снежных и ледяных массивов / Материалы гляциологических исследований. – ИГ РАН. – 2000. – № 89. – С. 1–9.
30. Тимошенко В. П., Тренев М. Г. Метод расчета тепловых режимов многослойных полупрозрачных материалов // Ученые записки ЦАГИ. – 1986. – Т. 17, № 2. – С. 83–93.
31. Рубцов Н. А., Голова Е. П. Влияние рассеяния на нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в двухслойной системе // Изв. СО АН СССР. Сер. “Технические науки”. – 1986. – № 5.
32. Горский В. В., Товстоног В. А. О применении метода моментов к решению уравнения лучистого переноса // Тр. МВТУ им. Н.Э. Баумана. – № 205. – 1976. – С. 70–78.
33. Товстоног В. А. Метод расчета теплообмена излучением в многослойных рассеивающих средах // Тр. МВТУ им. Н.Э. Баумана. – № 495. – 1988. – С. 31–42.
34. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
35. Маршалл В. Основные опасности химических производств. – М.: Мир, 1989. – 678 с.
36. Товстоног А. В. Модели и моделирование тепловых нагрузок применительно к экстремальным ситуациям // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2000. – № 1. – С. 48–69.
37. Товстоног В. А. Анализ теплообмена в светорассеивающих материалах, нагреваемых излучением // Физика и химия обработки материалов. – 1985. – № 3. – С. 35–40.

Статья поступила в редакцию 23.07.2007

Валерий Алексеевич Товстоног родился в 1947 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, автор более 120 научных работ в области исследования процессов теплопереноса в материалах специального назначения, тепловых и теплопрочностных испытаний материалов и конструкций при комплексных воздействиях.

V.A. Tovstonog (b. 1947) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Eng.), senior researcher, author of more than 120 publications in the field of study of heat transfer processes in special-purpose materials, thermal and thermal structural tests of materials and constructions under complex actions.

Федор Федорович Мосалов родился в 1981 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2004. Аспирант кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работы.



F.F. Mosalov (b. 1981) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2004. Post-graduate of “Spacecrafts and Launch Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications.

Владимир Гаврилович Мерзликин родился в 1951 г., окончил Московский инженерно-физический институт в 1974 г. Канд. техн. наук, доцент МГТУ “МАМИ”. Автор более 70 научных работ в области теплообмена излучением и тепловой защиты.



V.G. Merzlikin (b. 1951) graduated from the Moscow Institute for Engineering and Physics in 1974. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of the Moscow State Technical University “MAMI”. Author of more than 70 publications in the field of study of radiation heat exchange and thermal protection.

УДК 620.7.915.073

Л. Н. Лысенко, Нгуен Хай Минь

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КОНТУРА ВТОРИЧНОЙ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНЫХ ИЗ- МЕРЕНИЙ ПРИ КОРРЕКТИРОВКЕ СТРЕЛЬБЫ РЕАКТИВНЫХ СИСТЕМ ЗАЛПОВОГО ОГНЯ ПО НЕНАБЛЮДАЕМЫМ ОДИНОЧНЫМ ЦЕЛЯМ

Разработка реактивных систем залпового огня первоначально ориентировалась на решение задач уничтожения, главным образом, групповых целей. Сегодня, однако, задача повышения их точности до уровня, допускающего гарантированное поражение при относительно невысоком расходе боеприпасов также и одиночных целей, рассматривается как весьма актуальная наряду с проблемами увеличения дальности стрельбы. Результаты выполненных исследований представляют собой попытку дальнейшего совершенствования и обобщения теоретических положений известного подхода, связанного с использованием траекторных измерений при корректировке стрельбы средствами ракетно-артиллерийского вооружения. Показаны пути распространения их в случае корректировки стрельбы реактивных систем залпового огня.

Исходные предпосылки. Несмотря на то что разработка реактивных систем залпового огня (РСЗО) типа “Град”, “Смерч”, “Ураган” и других [1] первоначально была ориентирована на уничтожение групповых целей, сегодня задача повышения точности РСЗО до уровня,