

Д. А. Андриенко, С. Т. Суржиков

**СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК И МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ СЛОЖНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

*Представлены результаты численного решения уравнения переноса излучения (в  $P_1$ -приближении метода сферических гармоник) для нерассеивающей среды, соответствующей марсианской атмосфере. Расчет тепловых характеристик проведен для двух случаев объемного коэффициента поглощения излучения: постоянного по пространству и с учетом многокомпонентного состава среды. Для учета спектральных особенностей поглощающе-излучающей среды расчет выполнен в многогрупповой постановке для широкого спектрального диапазона. Проведено сравнение значений плотности потока излучения к поверхности сферического тела, полученных в результате решения диффузионного приближения уравнения переноса излучения и методом дискретных направлений.*

**E-mail: daniilandrienko@gmail.com**

**Ключевые слова:** численное моделирование, перенос излучения, структурированные сетки, метод сферических гармоник, метод дискретных направлений.

При решении многих прикладных задач космической физики, газовой динамики и физики плазмы необходим учет переноса излучения, воздействующего на исследуемые объекты, для более точного вычисления их тепловых характеристик. Из всего многообразия методов, позволяющих решить уравнение переноса излучения, следует выделить метод сферических гармоник (МСГ) как относительно простой и экономичный для компьютерной реализации [1–5]. Этот метод позволяет определить объемную мощность тепловыделения и плотность потока излучения в объеме и рассчитать потоки излучения, направленные к поверхности объекта.

Настоящая работа посвящена исследованию решения уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении МСГ, эквивалентного диффузионному приближению к уравнению переноса излучения. Достоинства и недостатки  $P_1$ -приближения хорошо известны и неоднократно обсуждались в литературе [1–5]. Среди недостатков, в первую очередь, следует указать низкую точность метода вблизи границы расчетной области и при малой оптической толщине излучающего слоя. Однако имеются веские доводы для использования этого метода при решении многомерных задач переноса излучения в криволинейной

геометрии, в первую очередь, его высокую экономичность. Это является главной причиной дальнейшего изучения вычислительных свойств  $P_1$ -приближения применительно к задачам аэрофизики и физической механики.

В настоящей работе исследовано поведение численного решения уравнения переноса излучения в  $P_1$ -приближении МСГ для широкого диапазона значений коэффициента объемного поглощения излучения в среде, проведено сопоставление результатов расчетов, полученных в этом приближении и альтернативным способом вычисления плотности радиационных потоков (метод дискретных направлений) [3], выполнен расчет спектральной плотности излучения для среды, соответствующей атмосфере Марса, а также рассмотрено влияние сильной криволинейности расчетной области на результаты решения.

Задача рассмотрена в сферически симметричной постановке, поэтому ее можно решать в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат на сетках различной топологии. Таким образом, весьма просто реализовать тестирование созданного программного кода при разных математических формулировках физической модели.

Чтобы различить влияние криволинейности используемых расчетных сеток на получаемое решение и погрешность, вносимую собственно  $P_1$ -приближением МСГ, решение уравнения переноса излучения выполнено для двух принципиально отличных друг от друга геометрических моделей: в плоском слое и в области, прилегающей к сферическому телу.

Цель настоящей работы состоит в определении вносимой погрешности  $P_1$ -приближения при решении задач переноса селективного излучения в цилиндрической геометрии на криволинейных сетках.

### Геометрические модели.

**Плоский слой.** Для описания переноса излучения в плоском слое сильно нагретого газа используется двумерная осесимметричная модель цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $h$  ( $r \gg h$ ). Такой тип геометрии был выбран, поскольку при  $r = 0$  задача соответствует одномерной модели переноса излучения, имеющей точное аналитическое решение.

Число узлов сетки по осям  $z$  и  $r$  составляет 50 и 250 соответственно (рис. 1). Используемая сетка регулярна, равномерна, ортогональна.

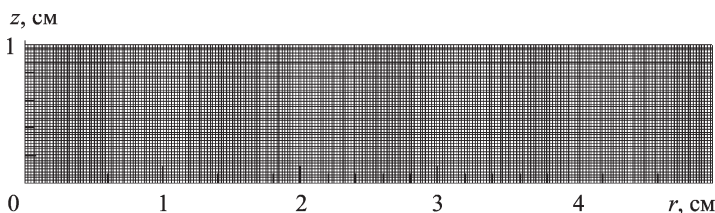


Рис. 1. Структурированная прямоугольная сетка, используемая для расчета переноса излучения в плоском слое

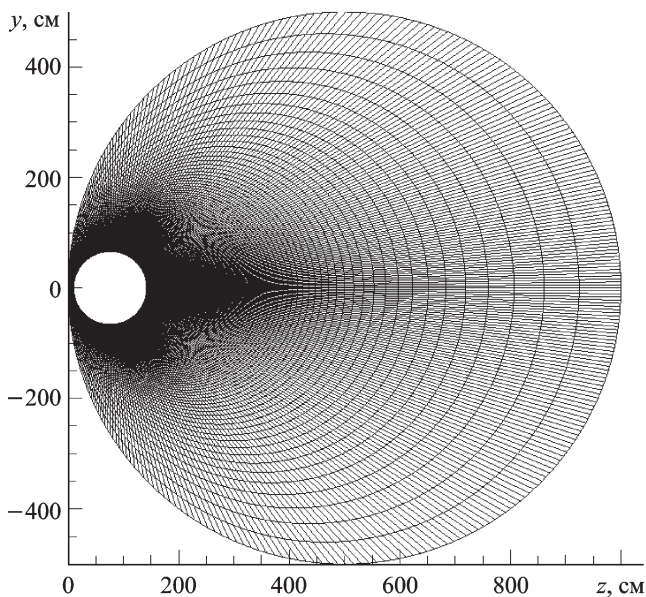


Рис. 2. Структурированная расчетная сетка в окрестности сферического тела. Число узлов сетки  $141 \times 61$

Такая относительная простота используемой расчетной сетки позволяет исключить влияние способа построения сетки и ее топологии на получаемые результаты и сосредоточиться только на анализе принципиального отличия решения в  $P_1$ -приближении МСГ от точного аналитического решения.

**Сложная геометрия.** На рис. 2 приведен тип сетки, используемый при решении уравнения переноса излучения для области сложного вида. Поскольку в такой постановке решаемая задача имеет ось симметрии, то расчет проводится только для половины области, ограниченной прямой  $y = 0$ . Размерность сетки принята  $141 \times 61$  узлов на границе сферы и на оси симметрии. Сгущение расчетной сетки в области наибольших градиентов температурного поля проводится аналитически [6].

**Система уравнений диффузионного приближения.** Спектральная интенсивность излучения удовлетворяет нестационарному уравнению переноса энергии излучения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial s} + [\kappa_\nu(s, t) + \sigma_\nu(s, t)] J_\nu(s, \Omega, t) = J_\nu^{em}(s, t) + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(s, t) \int_{\nu'=0}^{\infty} \int_{\Omega'=4\pi} \gamma(s, \Omega, \Omega', \nu', \nu) J_{\nu'}(s, \Omega', t) d\Omega' d\nu'; \quad (1)$$

здесь  $t$  — время;  $c$  — скорость света;  $J_\nu(s, \Omega)$  — спектральная интенсивность излучения;  $\nu$  — частота излучения;  $s$  — физическая координата в

направлении луча;  $\Omega$  — единичный вектор направлений;  $\kappa_\nu(s)$  — спектральный объемный коэффициент поглощения;  $J_\nu^{em}(s)$  — спектральная излучательная способность единицы объема;  $\gamma(s, \Omega, \Omega', \nu', \nu)$  — спектральная индикатриса рассеяния по направлению и частоте излучения.

При решении уравнения (1) используется приближение локального термодинамического равновесия, что означает выполнение соотношения  $J_\nu^{em}(s) = \kappa_\nu(s) J_{b,\nu}(T(s))$ , где  $J_{b,\nu}(T(s))$  — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела, зависящая от температуры, которая является функцией координаты. Далее среда предполагается нерассеивающей, т.е.  $\sigma_\nu(s, t) = 0$ , а уравнение переноса излучения квазистационарным, т.е. временное слагаемое  $\frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial t}$  носит фиктивный смысл и служит для построения численной схемы установления. При этих предположениях уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial J_\nu(s, \Omega, t)}{\partial s} + \kappa_\nu(s) J_\nu(s, \Omega, t) = \kappa_\nu(s) J_{b,\nu}(s). \quad (2)$$

Уравнение (2) решается в  $P_1$ -приближении МСГ, согласно которому спектральная интенсивность излучения представляется в виде линейной комбинации ортогональных полиномов Лежандра с коэффициентами, зависящими от пространственных координат, с последующим интегрированием уравнения (2) по полному телесному углу. Подробно этот метод и его приближения изложены в работах [1–3].

Опуская подробные выкладки, систему уравнений  $P_1$ -приближения МСГ для нерассеивающей среды в осесимметричной двумерной геометрии сводим к системе трех уравнений:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_{\nu,r})}{\partial r} + \frac{\partial W_{\nu,z}}{\partial z} + \kappa_\nu c U_\nu = 4\pi \kappa_\nu J_{b,\nu}; \quad (3)$$

$$\frac{c}{3\kappa_\nu} \frac{\partial U_\nu}{\partial r} + W_{\nu,r} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{c}{3\kappa_\nu} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} + W_{\nu,z} = 0, \quad (5)$$

где  $r, z$  — оси цилиндрической системы координат;  $W_{\nu,r}, W_{\nu,z}$  — проекции плотности спектрального радиационного потока на соответствующие оси цилиндрической системы координат;  $U_\nu$  — спектральная объемная плотность энергии излучения.

Система дифференциальных уравнений (3)–(5) приводится к одному уравнению в частных производных относительно спектральной объемной плотности энергии излучения  $U_\nu$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (D_\nu r \frac{\partial U_\nu}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z}) + \kappa_\nu c U_\nu = \kappa_\nu c U_{b,\nu}, \quad (6)$$

где  $D_\nu = c/3\kappa_\nu$  — спектральный коэффициент диффузии излучения в среде (далее спектральный индекс  $\nu$  будет опущен).

В настоящей работе используются структурированные расчетные сетки, ориентированные на конечно-разностный способ составления численной схемы. Кроме того, выбор конечно-разностного подхода при решении вопроса дискретизации уравнения переноса излучения был оправдан в силу своей простоты, по сравнению, например, с конечно-элементым подходом дискретизации.

Проведем взаимно-однозначную замену цилиндрических координат  $(r, z)$  на криволинейные координаты  $(\xi, \eta)$ . Якобиан преобразования  $J$  отличен от нуля в любой точке расчетной области. Результирующее уравнение в криволинейных координатах  $(\xi, \eta)$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{D \xi_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{D \eta_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + c\kappa U = c\kappa U_b. \end{aligned} \quad (7)$$

**Граничные условия.** Для уравнения переноса излучения, записанного в виде (1), граничные условия формулируются относительно интенсивности излучения:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1: \quad J(x = 0, \mu) &= J_0^+; \\ x = H, \quad -1 \leq \mu \leq 0: \quad J(x = H, \mu) &= J_H^-, \end{aligned}$$

но поскольку в диффузионном приближении МСГ постулируется связь между объемной плотностью энергии излучения и плотностью радиационного потока, то граничное условие должно формулироваться относительно объемной плотности энергии излучения.

Из возможных граничных условий для уравнения переноса излучения в настоящей работе используется граничное условие Маршака, подробно описанное в работе [3]. Для внешних по отношению к исследуемому объему границ это условие записывается как

$$\begin{aligned} W(\tau = 0) &= - \frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{\tau=0} = 2\pi J_{\tau=0}^+ - \frac{c}{2} U|_{\tau=0}; \\ W(\tau = H) &= - \frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dx} \Big|_{\tau=H} = -2\pi J_{\tau=H}^- + \frac{c}{2} U|_{\tau=H}, \end{aligned}$$

где  $\tau$  — оптическая толщина слоя в направлении внешней нормали к границе. При решении задачи переноса излучения в области, приле-

гающей к сферическому телу, полагается  $\tau = 0$  и  $\tau = H$  на границах, прилегающей к сферическому телу и смежной с невозмущенной средой;  $J_{\tau=0}^+$  и  $J_{\tau=H}^-$  — интенсивность внешнего излучения по отношению к изучаемому объему. В дальнейших расчетах полагаем, что  $J_{\tau=0}^+ = J_{\tau=H}^- = 0$ , поэтому граничные условия преобразуются к виду

$$-\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dn} \Big|_{\tau=0} = -\frac{c}{2} U \Big|_{\tau=0}; \quad (8)$$

$$-\frac{c}{3\kappa} \frac{dU}{dn} \Big|_{\tau=H} = \frac{c}{2} U \Big|_{\tau=H} \quad (9)$$

и носят простой физический смысл: на границе плотность радиационного потока равна диффузионной составляющей плотности потока от рассматриваемого излучающего объема. Данное граничное условие — приближенное, поскольку в соответствии с определением объемной

плотности энергии  $U = \frac{2\pi}{c} \int_{\Omega=4\pi} J d\Omega$ , т.е. для точного вычисления

объемной плотности энергии излучения необходимо знать распределение интенсивности излучения в полном телесном угле, однако граничные условия получены интегрированием объемной плотности энергии только в половине телесного угла, а в другой половине пространства предполагалось только изотропное распределение интенсивности внешнего излучения. Интегрирование разрывной функции интенсивности излучения вблизи границы может привести к неточному решению уравнения переноса излучения, однако, как показали численные эксперименты, такое граничное условие позволяет получить решение с приемлемой точностью.

**Перенос излучения в плоском слое** при распределении температуры, зависящем только от координаты  $z$ , может быть описан посредством интегро-экспоненциальных функций, введенных Чандрасекхаром [7]. Как уже отмечалось, в данной работе задача переноса излучения для плоского слоя сводится к задаче для цилиндра радиусом  $R \gg H$ , что позволяет, пренебрегая краевыми эффектами, рассматривать расчет переноса излучения вдоль оси цилиндра как задачу одномерного переноса излучения в нерассеивающей среде.

Положим  $H = 1$  см,  $R = 5$  см. Вдоль образующей цилиндра граничное условие для объемной плотности энергии излучения формулируется как условие симметрии  $\frac{\partial U}{\partial r} = 0$ . На границах, соответствующих координатам  $z = 0$  и  $z = H$ , используются граничные условия (8) и (9). Температурное поле задается линейной функцией координаты  $z$ :  $T = T_{\min} + (T_{\max} - T_{\min})z/H$ , где для рассматриваемого случая принято  $T_{\min} = 1000$  К,  $T_{\max} = 10000$  К.



Аналитическое решение для  $z$ -компоненты плотности радиационного потока излучения для плоского слоя взято из работы [3]. Согласно приведенным формулам, для нерассеивающей среды при отсутствии внешнего по отношению к исследуемому объему излучения имеем

$$W(\tau) = 2\pi \int_0^{\tau} J_b [T(\tau')] E_2(\tau - \tau') d\tau' - 2\pi \int_{\tau}^{\tau_H} J_b [T(\tau')] E_2(\tau' - \tau) d\tau', \quad (10)$$

где  $E_n(x) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \mu^{n-2} d\mu$  — интегро-экспоненциальная функ-

ция;  $\tau = \int_0^z \kappa dz'$  — оптическая координата;  $\tau_H = \int_0^H \kappa dz$  — полная

оптическая толщина слоя. Интегралы спектральной интенсивности абсолютно черного тела по частоте в формуле (10) вычисляются по формуле трапеции, причем число разбиений отрезка  $[0; \tau_H]$  при вычислении подынтегральных выражений соответствует числу узлов равномерной сетки вдоль оси  $z$  (см. рис. 1).

**Спектральная модель переноса излучения в области сложной геометрии.** На первом этапе численного эксперимента предполагается, что объемный коэффициент поглощения излучения не зависит от частоты излучения и является постоянной функцией пространственных координат. Данное приближение позволяет проинтегрировать спектральную интенсивность излучения абсолютно черного тела по частоте, что приводит к выражению  $U_b = \tilde{\sigma} T^4 / \pi$  ( $\tilde{\sigma} = 5,67$  эрг / (с·см<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>) — постоянная Стефана–Больцмана). Такое предположение, хоть и является грубым, позволяет намного быстрее по сравнению с методом дискретных направлений и избежав спектрального расчета, оценить порядок плотности радиационного потока и объемную мощность тепловыделения, обусловленную радиационными процессами. В дальнейшем к задаче о расчете интегральной по спектру интенсивности излучения будет применяться термин *интегральная задача*.

На втором этапе численного эксперимента предполагается, что объемный коэффициент поглощения излучения существенно зависит от состава среды. Концентрации компонентов атмосферы, поля давления и температуры получены с помощью программного кода NERAT 2D [8]. Расчет спектральных свойств излучающих компонентов среды проводится с помощью программного комплекса

ASTEROID [9] для распределений температуры, полей давления и скоростей и концентраций компонентов  $\text{CO}_2$  и  $\text{CO}$  в набегающем потоке при входе аппарата в атмосферу Марса (рис. 3–7 соответственно).

Спектральный расчет наиболее трудоемкий, поскольку приходится решать задачу переноса селективного излучения для каждой спектральной группы, число которых может исчисляться сотнями. Однако это существенно при надлежащей оптимизации программного кода

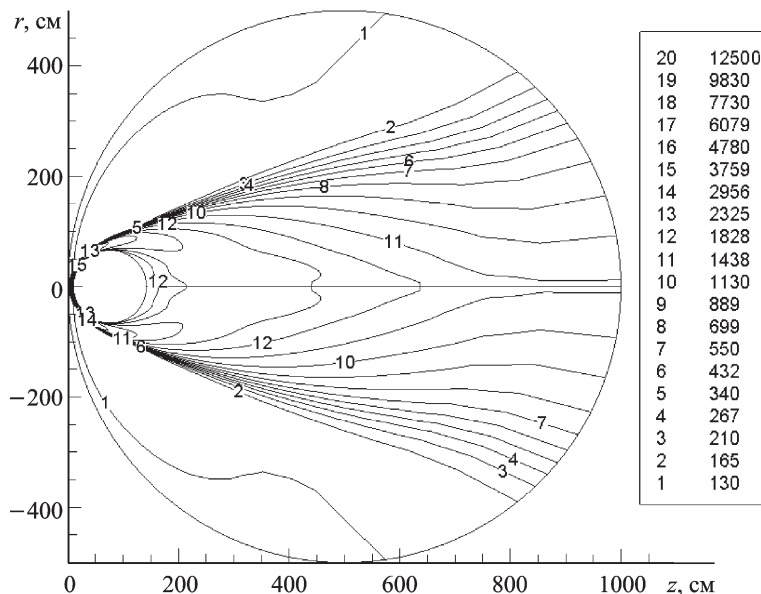


Рис. 3. Температурное поле, К

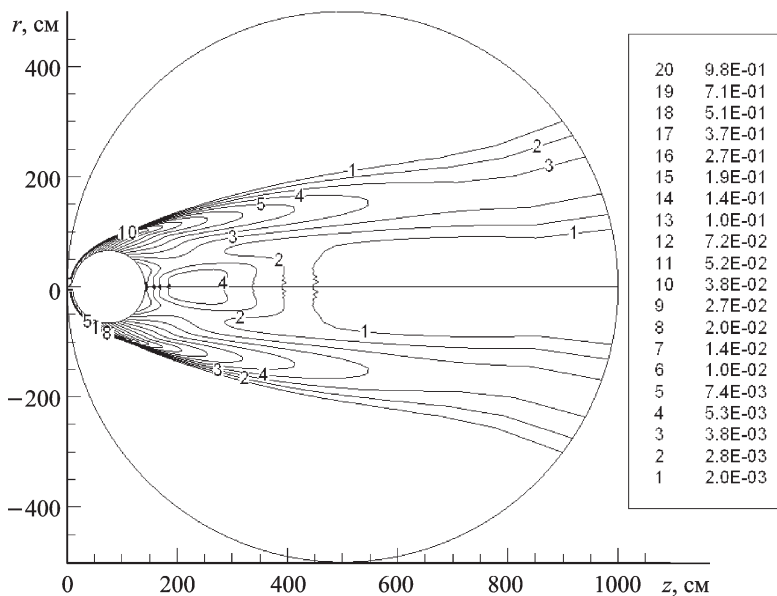


Рис. 4. Поле давления,  $\times 5,7 \cdot 10^{-3}$  атм



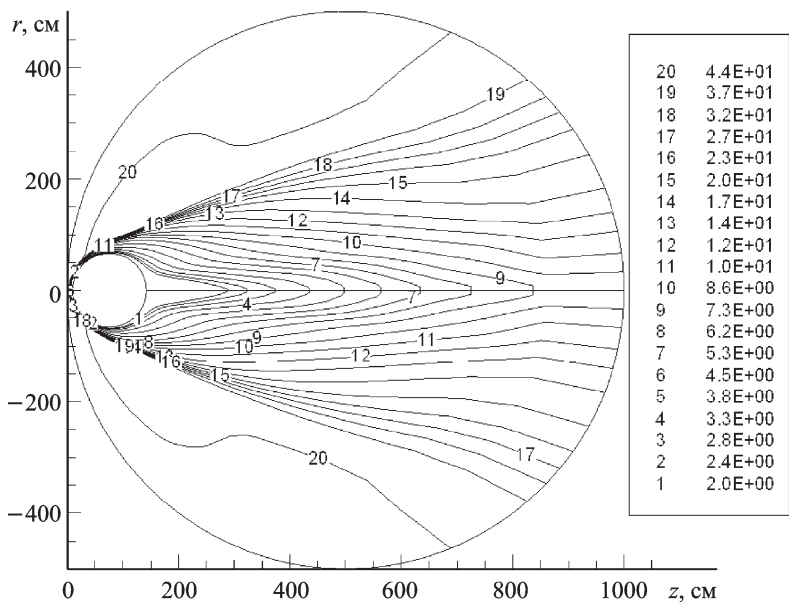


Рис. 5. Поле скорости набегающего потока, М (число Маха)

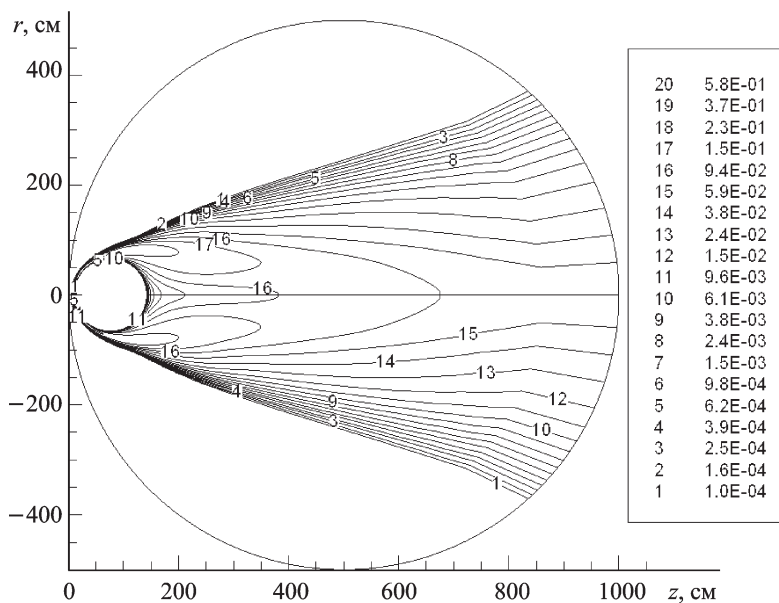


Рис. 6. Концентрация CO, массовая доля

(при использовании в качестве начального приближения для текущего спектрального интервала решения для предыдущей спектральной группы и учета только сильно поглощающих спектральных групп), а также при адаптивном разбиении всего спектрального диапазона на группы с учетом пиков поглощения, зависящих от состава среды, такой подход позволяет наиболее точно предсказать реальные плотности радиационных потоков в широком спектральном диапазоне. В даль-

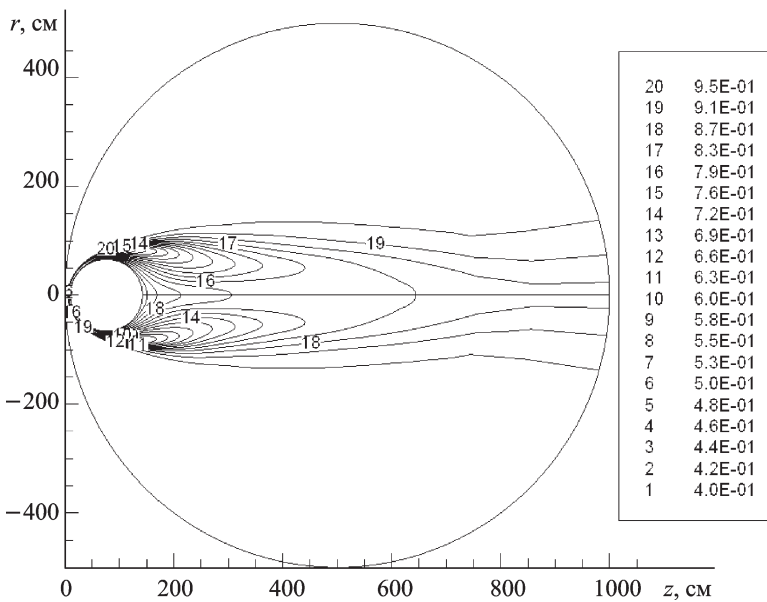


Рис. 7. Концентрация CO<sub>2</sub>, массовая доля

нейшем задачу о переносе излучения с учетом спектральных свойств среды будем называть *спектральной задачей*.

На рис. 8 приведены значения максимального по пространству объемного коэффициента поглощения в каждой спектральной группе (разбиение спектральных групп предполагается равномерным по всему спектральному диапазону).

В пределах каждой спектральной группы вычисляется спектральная интенсивность излучения  $J_{b,\omega_0}^0(T) = \int_{\Delta\omega_g} J_{b,\omega}(T) d\omega$  (где  $T$  — температура, К;  $\omega_0$  — волновое число), а спектральная излучательная способность тела в спектральном интервале  $[\omega_0 - \Delta\omega/2, \omega_0 + \Delta\omega/2]$  находится как  $U_{\Delta\omega_g} = \kappa_g \int_{\Delta\omega_g} J_{b,\omega}(T) d\omega \approx \kappa_g J_{b,\Delta\omega_g}^0(T)$  (здесь  $\kappa_g = \frac{1}{\Delta\omega_g} \int_{\Delta\omega_g} \kappa_\omega d\omega$  — групповой коэффициент поглощения). Интегральную

объемную плотность энергии излучения находят простым суммированием спектральной плотности энергии излучения по всем спектральным группам:  $U = \sum_{g=1}^N U_{\Delta\omega_g}$ ; интегральную плотность радиационного потока от всех спектральных групп находят аналогично:

$$W = - \sum_{g=1}^N \text{grad} \left( \frac{c}{3\kappa_g} U_{\Delta\omega_g} \right).$$

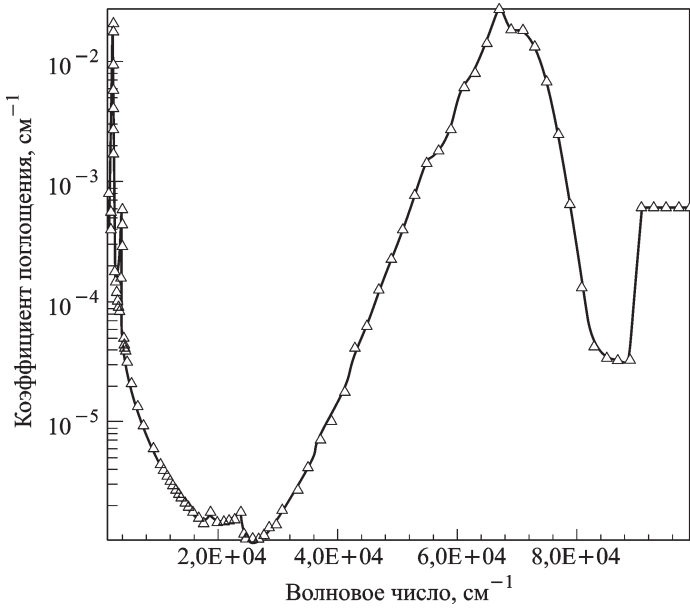


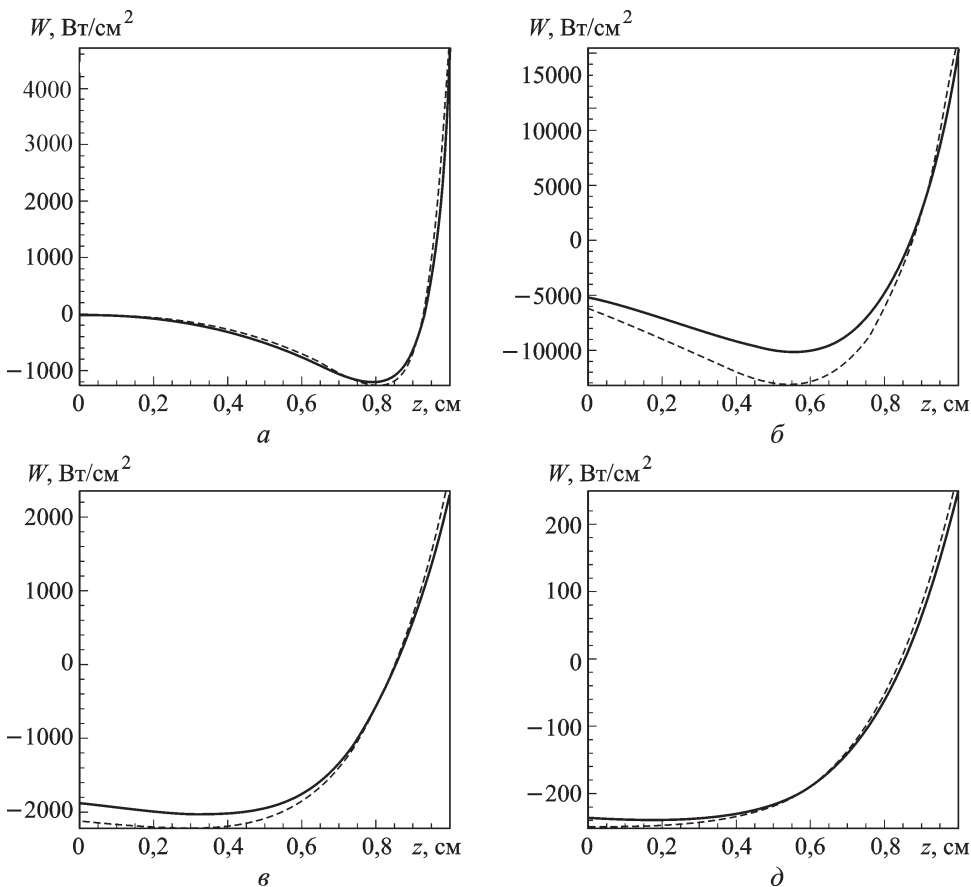
Рис. 8. Зависимость спектрального коэффициента поглощения от волнового числа в диапазоне  $1,5 \cdot 10^3 \dots 10^5 \text{ см}^{-1}$ . Треугольниками помечены середины спектральных групп, в пределах которых коэффициент поглощения считается постоянной величиной, по оси ординат отложено максимальное по пространству значение коэффициента поглощения в соответствующей спектральной группе

### Результаты расчетов.

**Перенос излучения в плоском слое.** На приведенных далее рисунках изображена осевая компонента плотности радиационного потока, рассчитанного, исходя из значений объемной плотности энергии излучения по  $P_1$ -приближению МСГ и по формуле (10). Расчет проводился для четырех значений коэффициента поглощения:  $\kappa = 10 \text{ см}^{-1}$ ,  $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\kappa = 0,1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\kappa = 0,01 \text{ см}^{-1}$ ; соответствующие графики изображены на рис. 9. Сопоставление результатов проводилось по всем точкам расчетной сетки.

При оптической толщине излучающего слоя  $\tau_H = 10$  значения плотности потока излучения в  $P_1$ -приближении МСГ и значения, полученные на основе аналитического решения, находятся в хорошем соответствии друг с другом (относительное расхождение составляет 0,5%, см. рис. 9). При меньших значениях оптической толщины слоя расхождение увеличивается.

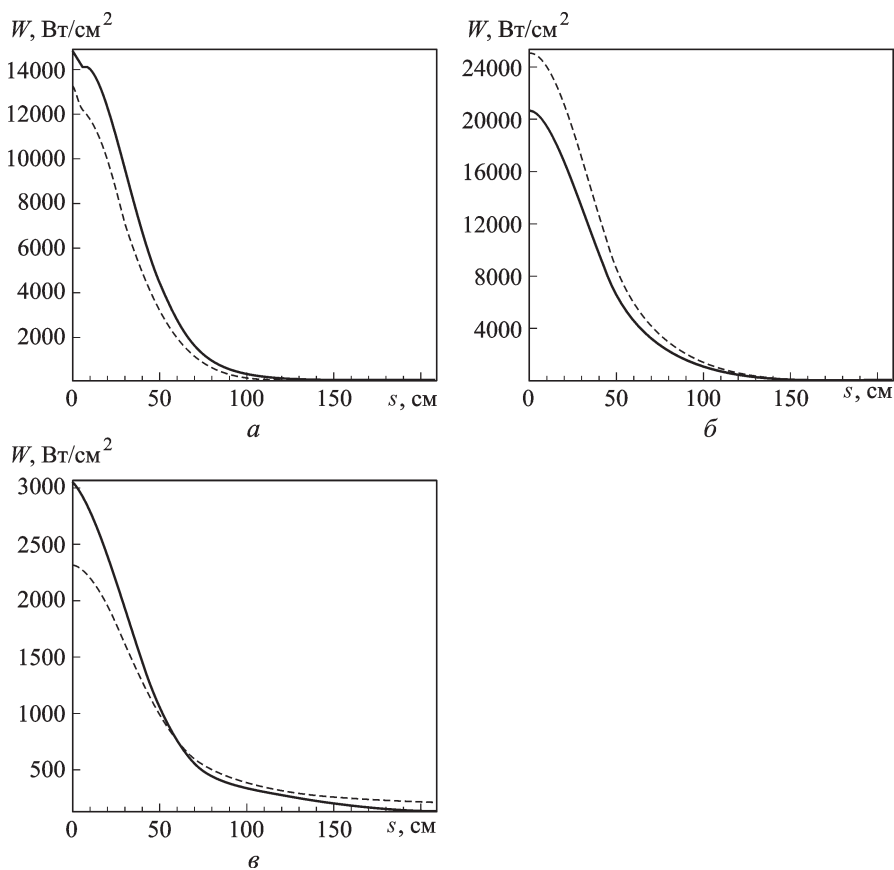
**Моделирование процесса переноса излучения в окрестности сферического тела.** При решении интегральной задачи переноса излучения объемный коэффициент поглощения излучения полагается постоянной величиной, и каждый расчет проводится при постоянном коэффициенте поглощения, который от расчета к расчету изменяется в диапазоне от 10 до  $10^{-3} \text{ см}^{-1}$ . Результаты вычислений плотности по-



**Рис. 9. Осевая компонента плотности радиационного потока:** сплошная кривая — результат  $P_1$ -приближения метода сферических гармоник, штриховая — результат аналитического решения;  $\kappa = 10$  (а), 1 (б), 0,1 (в) и 0,01 (г)  $\text{см}^{-1}$

тока излучения, падающего на поверхность тела сферической формы, приведены на рис. 10.

На втором этапе вычисления проведены для реального распределения коэффициента поглощения (см. рис. 8) в расчетной области. Из сравнения результатов расчетов по  $P_1$ -приближению МСГ и методом дискретных направлений следует, что при постоянном коэффициенте поглощения их относительное различие возрастает при переходе от среды с большим значением коэффициента объемного поглощения излучения ( $\kappa \sim 1 \text{ см}^{-1}$ ) к среде с малым его значением ( $\kappa \sim 0,01 \text{ см}^{-1}$ ). Учитывая тот факт, что при малых коэффициентах поглощения объемная плотность энергии излучения относительно невелика по сравнению с ее значениями для оптически плотной среды и соответствующая плотность потока излучения к поверхности сферического тела в оптически прозрачной среде мала по сравнению с плотностью потока излучения в оптически плотной среде, можно сделать вывод, что в интервале частот  $10^4 \text{ см}^{-1} \leq \nu \leq 10^5 \text{ см}^{-1}$  поглощения излучения почти



**Рис. 10. Плотность потока излучения к поверхности сферы:**

сплошная кривая соответствует методу дискретных направлений, штриховая —  $P_1$ -приближению МСГ на расчетной сетке  $141 \times 61$  узел, коэффициент объемного поглощения  $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$  (а), 0,1 (б) и 0,01 (в)

не происходит и плотность потока излучения от данных спектральных групп можно не учитывать.

Были проведены два спектральных расчета, при которых минимальное значение коэффициента поглощения излучения ограничено значениями  $10^{-2}$  и  $10^{-3} \text{ см}^{-1}$ . Спектральные группы, имеющие максимальные по пространству коэффициенты поглощения, меньше, чем  $10^{-2}$  и  $10^{-3} \text{ см}^{-1}$ , при вычислении интегральных величин не учитывались. Таким образом, с одной стороны, получаются грубые результаты из-за того, что коэффициент поглощения в сильно поглощающих спектральных группах ограничивается снизу фиксированным значением, а с другой стороны, вклад от слабо излучающих спектральных групп не учитывается, поскольку относительная погрешность  $P_1$ -приближения в этом случае может быть существенно больше 100 %.

На рис. 11, а изображен сравнительный график для плотности потока излучения, рассчитанной по двум методам: сплошная кривая соответствует плотности потока, рассчитанной по  $P_1$ -приближению МСГ,

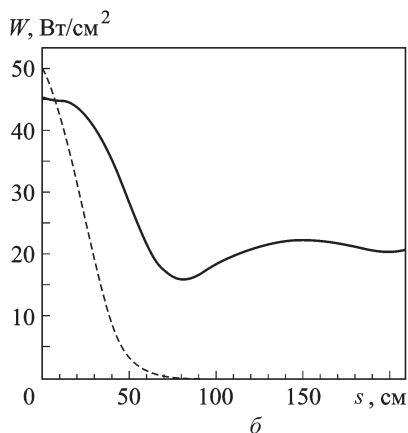
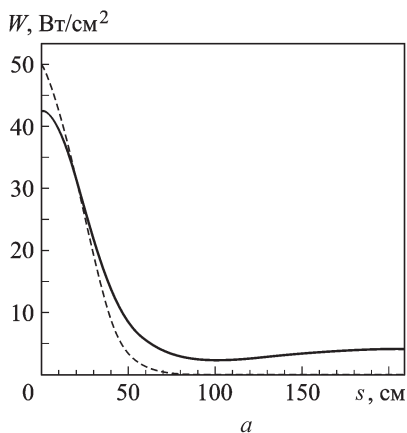


Рис. 11. Плотность радиационного потока к поверхности сферического тела (потоки по МСГ рассчитаны и просуммированы только для спектральных групп с коэффициентом поглощения  $\kappa \geq 10^{-2} \text{ см}^{-1}$  (а) и  $\kappa \geq 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (б))

штриховая кривая — плотности потока излучения, рассчитанной по методу дискретных направлений. Относительная ошибка в определении плотности потока излучения для передней критической точки составляет 15 %, а для точки поверхности, находящейся на расстоянии 50 см от передней критической линии тока, составляет 60 %. Поскольку область  $s \geq 100$  см соответствует коэффициентам поглощения, которые на один-два порядка меньше, чем коэффициенты поглощения в области  $s \leq 50$  см, то, как и предполагалось, для сферического тела относительная разность в значении плотности потока излучения в дальней точке относительно передней критической линии тока будет больше, чем в окрестности самой критической линии тока.

Также был проведен расчет, в котором минимальное значение коэффициента поглощения ограничено величиной  $\kappa \geq 10^{-3} \text{ см}^{-1}$  (рис. 11, б). Относительная ошибка в значениях плотности радиационного потока для передней критической точки составляет 8 %. Однако расхождение в значениях плотности потока для окрестности задней критической линии гораздо более существенное. Такой результат является ожидаемым, поскольку в задней области сферического тела все спектральные группы имеют объемный коэффициент поглощения излучения, значительно меньший, чем во фронтальной части сферического тела.

**Выводы.** Выполненные интегральные и спектральные расчеты уравнения переноса излучения для двумерной цилиндрической геометрии на равномерных ортогональных и на криволинейных регулярных сетках позволяют сделать выводы об области применимости  $P_1$ -приближения МСГ в задачах аэротермодинамики.

Проведенные расчеты для плоского слоя показали, что  $P_1$ -приближение метода сферических гармоник удовлетворительно описывает

перенос излучения в сильно нагретой среде по сравнению с точным аналитическим решением данной задачи в широком диапазоне значений объемного коэффициента поглощения (в интервале  $10^{-2} \dots 10 \text{ см}^{-1}$  относительное различие не превышает 23 %).

Проведены расчеты интегральных характеристик поля излучения для геометрии, описывающей перенос излучения в окрестности тела сферической формы при значении коэффициента поглощения в диапазоне от  $10^{-3}$  до  $1 \text{ см}^{-1}$ , и проведено сопоставление с результатами расчетов, полученными при использовании метода дискретных направлений. Отметим, что относительное различие в плотности потока излучения для этих методов увеличивается с уменьшением коэффициента поглощения.

Для учета спектральных свойств среды по результатам интегрального расчета предложено ограничить диапазон значений коэффициента поглощения значениями  $10^{-2}$  и  $10^{-3} \text{ см}^{-1}$ . Выяснено, что при таком искусственном завышении объемного коэффициента поглощения значение плотности потока для передней критической точки, рассчитанное в  $P_1$ -приближении метода сферических гармоник, отличается от значений, вычисленных по методу дискретных направлений, на 15 % и 8 % соответственно. Однако эти разности значений для части поверхности сферы в окрестности задней критической точки гораздо больше, поскольку в этой области среда оптически более прозрачна.

Большое различие результатов для окрестности задней критической линии тока при коэффициенте поглощения  $10^{-2} \text{ см}^{-1}$  свидетельствует о том, что на получаемые результаты при использовании метода сферических гармоник сильно влияет криволинейность расчетной области.

*Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 10-01-00544 и программ РАН “Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах, материалах и средах”, “Фундаментальные проблемы горения и детонации в энергетике”, “Физико-химическая механика неравновесных систем”, а также федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. по разделу “Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области механики” (шифр 2010-1.1-112-024) по теме “Проведение теоретических и экспериментальных исследований механики систем с внутренними степенями свободы” (шифр 2010-1.1.-112-024-055).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дэ в и с о н Б. Теория переноса нейтронов. – М.: Атомиздат. 1960. – 520 с.
2. М а р ч у к Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. – М.: Госатомиздат, 1961. – 667 с.



3. С у р ж и к о в С. Т. Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 544 с.
4. Г р и н с п е н Х., К е л б е р К., О к р е н т Д. -М. Вычислительные методы в физике реакторов. – М.: Атомиздат, 1972. – 370 с.
5. С у ш к е в и ч Т. А. Математические модели переноса излучения. – М.: Бином. Лаборатория знаний. 2006, – 661 с.
6. С у р ж и к о в С. Т. Аналитические методы построения конечно-разностных сеток для расчета азротермодинамики спускаемых космических аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2004. – № 2. – С. 24–50.
7. Ч а н д р а с е к х а р С. Перенос лучистой энергии. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. – 432 с.
8. С у р ж и к о в С. Т. Двумерная радиационно-газодинамическая модель аэрофизики спускаемых космических аппаратов / В кн. Актуальные проблемы механики. Механика жидкости, газа и плазмы. – М.: Наука, 2008. – С. 20–59.
9. С у р ж и к о в С. Т. Оптические свойства газов и плазмы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 576 с.

Даниил Андриенко окончил МФТИ (ГУ) в 2010 г. Аспирант МФТИ, программист-математик лаборатории “Радиационная газодинамика” Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. Автор 10 научных работ в области радиационной газовой динамики.

D.A. Andrienko graduated from the Moscow Physics and Technology Institute (state university) in 2010. Post-graduate of the Moscow Physics and Technology Institute, programmer-mathematician of Radiative Gas Dynamics Laboratory of the Institute for Problems in Mechanics n.a. A.Yu. Ishlinskii, Russian Academy of Sciences. Author of 12 publications in the field of radiative gas dynamics.

Сергей Тимофеевич Суржигов окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1975 г., МГУ им. М.В. Ломоносова в 1984 г. Чл.-кор. РАН, д-р физ.-мат наук, заместитель директора по научной работе, заведующий лабораторией “Радиационная газодинамика” Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, заведующий кафедрой “Физическая и химическая механика” МФТИ, профессор кафедры “Теплофизика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 400 научных работ в области теплофизики и радиационной газодинамики.

S.T. Surzhikov graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1975 and Moscow State University n.a. M.V. Lomonosov in 1984. Dr. Sc. (Phys.-Math.), Deputy Director, Head of the Radiative Gas Dynamics Laboratory of the Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences. Head of the Chair of Physical and Chemical Mechanics of the Moscow Institute of Physics and Technology, professor of “Heat Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 400 publications in the field of heat physics and radiative gas dynamics.