

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

С.Д. Алгазин

algazinsd@mail.ru

ИПМех РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача о свободных колебаниях ортотропной цилиндрической оболочки конечной длины. Эта задача интенсивно исследовалась в СССР во второй половине XX в., но не потеряла своей актуальности и в настоящее время, например в работах доктора технических наук Гулгазарян Л.Г. и др. Основы теории ненасыщаемых численных методов кратко изложены в книге члена-корреспондента АН СССР Бабенко К.И. «Основы численного анализа». Исследования в вычислительной математике в этом направлении недостаточно пропагандировались и за рубежом были практически неизвестны. В настоящее время в странах Запада, например в США и Швейцарии, началось фактическое перераскрытие этих же вычислительных методов под названием «спектральные методы», а также в виде современных $(h-p)$ -специализаций метода конечных элементов, в которых при измельчении сетки одновременно увеличивается степень полиномов, используемых для аппроксимации функций внутри одного конечного элемента. Приведен современный алгоритм без насыщения, выполнены конкретные расчеты, которые показывают его высокую эффективность

Ключевые слова

Цилиндрическая оболочка, свободные колебания, задачи на собственные значения, численный алгоритм без насыщения

Поступила 06.08.2022

Принята 19.09.2022

© Автор(ы), 2023

*Работа выполнена по теме государственного задания
№ 123021700050-1*

Введение. Впервые свободные колебания цилиндрической оболочки рассмотрены академиком Ониашвили О.Д. [1]. Динамическая задача теории оболочек сводится к соответствующей статической, если в уравнениях статики в значения компонентов вектора внешней нагрузки входят значения компонентов сил инерции. В динамических задачах компоненты внешней нагрузки равны соответствующим компонентам сил инерции:

$$X = -\rho\delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad Y = -\rho\delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad Z = -\rho\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Поскольку динамическая жесткость оболочки в направлении срединной поверхности намного больше жесткости в направлении нормали к последней, то тангенциальными составляющими сил инерции обычно пренебрегают:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -\rho\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Здесь рассмотрены колебания изгибного типа, определяемые нормальными смещениями $w(\alpha, \beta)$ точек срединной поверхности.

В таких случаях задача сводится к решению однородных дифференциальных уравнений тонкостенных оболочек. При решении таких уравнений произвольные функции (произвольные постоянные, если уравнения в частных производных приведены к типу обыкновенных путем разделения переменных) следует подчинить граничным условиям. В результате получаем систему однородных уравнений.

Условием существования произвольных функций (произвольных постоянных) является обращение в нуль соответствующего детерминанта. Для получения частот свободных колебаний оболочки необходимо раскрыть этот детерминант. Если контур оболочки прямоугольный в плане и на каждом краю задано четыре произвольных граничных условия, то упомянутый детерминант окажется 16-го порядка, т. е. его практически невозможно раскрыть.

К таким сложностям приводит решение однородной граничной задачи теории оболочек для общего случая, когда на контуре оболочки заданы произвольные граничные условия. Большие сложности возникают даже в менее общем случае, когда произвольные граничные условия заданы на противоположных краях. Ортотропная оболочка рассмотрена в [2].

В настоящей работе приведены современный высокоэффективный алгоритм без насыщения и конкретные расчеты, подтверждающие высокую эффективность.

Из работ зарубежных авторов отметим [3–10]. Обзор приведен в [10], в [3, 4] изучено вибрационное и затухающее поведение ортотропных цилиндрических оболочек с ограниченным вязкоупругим ядром с использованием конечного элемента на основе теории дискретных слоев. Упрощенная теория оболочек на основе уравнений Доннелла — Муштари — Власова для изучения вибрационного анализа ортотропных цилиндрических оболочек со свободно опертыми концами с использованием

замкнутой формы решения предложена в [5]. На основе точного решения в [6] рассмотрено неосесимметричное динамическое поведение заглубленных ортотропных цилиндрических оболочек, возбужденных комбинацией Р-, SV- и SH-волн. Для исследования модальных характеристик тонкостенных ортотропных круглых цилиндрических оболочек со свободно опертыми концами в [7] использована вариационная процедура Рэлея — Ритца. Для изучения вибрации и демпфирования ортотропных цилиндрических оболочек с ограниченным демпфирующим слоем и при соблюдении классических граничных условий в [8] предложен метод конечных элементов. Аналитическая процедура и вибрационные решения замкнутой формы с аналитически определяемыми коэффициентами для ортотропных круглых цилиндрических оболочек, подверженных классическим граничным условиям, приведены в [9].

Как правило, в указанных работах решение представлено в виде синуса/косинуса по осевой и окружной координатам с числом волн m и n . В настоящей работе решение по окружной координате приведено в виде синуса/косинуса, а по осевой — интерполировано многочленом. Производные от решения получены дифференцированием этих интерполяционных формул. Таким образом, задача сведена к проблеме собственных значений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель настоящей работы — доказать методом вычислительного эксперимента, что для современных численных методов без насыщения эта задача не является сложной.

Сравнение с более ранними вычислениями затруднительно по указанной ранее причине. Далее приведено сравнение с результатами работы [10]. Совпадение, как и следовало ожидать, плохое. В работах российских авторов [11, 12] конкретных расчетов не приведено.

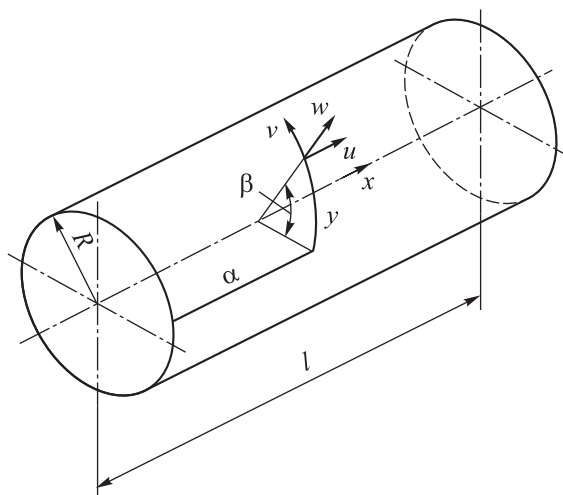
Материалы и методы решения задач, принятые допущения. Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку (рисунок) длиной l , толщиной h и радиусом R , приведенную следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \omega^2 \rho u_1; \quad (3) \\
 & - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \\
 & - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R^2} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \\
 & = \omega^2 \rho u_2; \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \\ & + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \frac{B_{11}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \\ & = \omega^2 \rho u_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь B_{ij} — коэффициенты упругости; u_1 , u_2 и u_3 — проекции вектора смещений соответственно в направлениях α , β и нормали к поверхности оболочки; R — радиус направляющей окружности срединной поверхности; ω — угловая частота собственных колебаний; ρ — плотность материала; $\mu^4 = h^2 / 12$ [13];

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{66} = G_{12} = G; \\ B_{12} &= \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{16} = B_{26} = 0; \\ \nu_{12} &= \nu_2; \quad \nu_{21} = \nu_1; \quad \nu_2 E_1 = \nu_1 E_2. \end{aligned} \quad (6)$$



Ортотропная цилиндрическая оболочка

Введем безразмерные переменные:

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2}{B_{11}} R^2; \quad \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{R}; \quad \hat{\beta} = \frac{\beta}{R}; \quad \hat{h} = \frac{h}{R}; \quad u = \frac{u_1}{R}; \quad v = \frac{u_2}{R}; \quad w = \frac{u_3}{R}.$$

Далее знак $\hat{\quad}$ над безразмерными величинами опускаем, в (3)–(6) полагаем:

$$u = U(\alpha) \cos n\beta; \quad v = V(\alpha) \sin n\beta; \quad w = W(\alpha) \cos n\beta. \quad (7)$$

В результате при $n = 0$ получаем

$$\begin{aligned} -U''(\alpha) + \nu_2 W'(\alpha) &= \lambda U(\alpha); \\ (h^2 / 12) W^{(IV)}(\alpha) - U'(\alpha) + r_{21} W(\alpha) &= \lambda W(\alpha); \quad r_{21} = E_2 / E_1. \end{aligned} \quad (8)$$

К уравнениям (8) необходимо добавить граничные условия. Обозначим $b = l / R$, тогда условия защемления по торцам оболочки можно записать так:

$$\begin{aligned} U(0) = U(b) = 0; \quad V(0) = V(b) = 0; \\ W(0) = W(b) = 0, \quad W'(0) = W'(b) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрицы численного дифференцирования. В численных алгоритмах без насыщения решение интерполируется многочленом. Матрицы численного дифференцирования получаем, дифференцируя интерполяционные формулы.

Для дискретизации уравнений (8) применяем интерполяцию многочленами. Полагаем, что

$$u(x) = \sum_{j=1}^M l_j(x) u_j, \quad u_j = u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (10)$$

где $l_j(x)$, $l_j(x_i) = \delta_{ij}$ — фундаментальные функции интерполяции, удовлетворяющие рассматриваемым краевым условиям; x_j — узлы интерполяции по x ; M — число узлов. Отметим, что с целью минимизировать константы Лебега интерполяции применяется неравномерная сетка по x [14]. Дискретизация многочленами по пространственной переменной реагирует на гладкость отыскиваемого решения и ее точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет отыскиваемое решение (по x). Априори эту гладкость знать не нужно, поскольку метод сам настроится на нее [14, с. 235]. Такие численные методы Бабенко К.И. предложил называть численными алгоритмами без насыщения [15]. Последний обзор по численным алгоритмам без насыщения опубликован в [16].

Дифференцируя интерполяционную формулу (10) p раз по x , получаем

$$u^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^M l_j^{(p)}(x) u_j, \quad u_j = u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

тогда

$$u^{(p)}(x_i) \approx \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(p)} u_j, \quad D_{ij}^{(p)} = l_j^{(p)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Погрешность численного дифференцирования аналитически исследована в [16, 17], эта задача некорректная. Автором выполнено экспериментальное исследование формулы численного дифференцирования на бесконечно дифференцируемых функциях. Получено, что для $p = 1, 2, 3, 4$ и $M \leq 50$ точность численного дифференцирования приемлемая. Отметим, что для рассматриваемой задачи число узлов достаточно выбирать не более 40.

Дискретизация уравнений (8) выполняется заменой производных от u и w матрицами численного дифференцирования [18].

Результаты численных расчетов. Методические расчеты проводились для задачи на собственные значения (8), (9) при $b = 2$, $\rho = 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $E_1 = 6,37 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $E_2 = 1,47 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $G = 4,9 \cdot 10^9$, $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,06$. На сетке по α из пяти узлов ($M = 5$) получены следующие собственные значения ($\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2, 3$): 0,4975, 0,66 и 0,96. На сетке из 10 узлов получены близкие собственные значения: 0,4974054164, 0,63141693 и 0,9829 (удержаны знаки, совпавшие с расчетами на 20 узлах). Таким образом, первое собственное значение (основной тон) определено на пяти узлах с четырьмя знаками после запятой. Подробно расчеты приведены далее.

Методические расчеты. При $M = 20 NT = 40$, $BL = 2,0000000000000000$ запишем следующие собственные значения (приведены знаки, совпавшие с результатом расчета $M = 10 NT = 20$): 1) 0,4974054165; 2) 0,63141697; 3) 0,98290; 4) 0,151; 5) 2,20; 6) 3,0.

Результаты сравнения полученных значений с данными из [10] при $L = 5 \text{ м}$, $h = 0,01 \text{ м}$, $R = 1 \text{ м}$, $E_1 = 120 \text{ ГПа}$, $E_2 = 10 \text{ ГПа}$, $G_{xy} = 5,5 \text{ ГПа}$, $\mu_{1,2} = 0,27$, $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$, $M = 20 NT = 40$, $BL = 5,0000000000000000$ приведены в таблице.

Результаты сравнения полученных значений с данными из [10]

Методы расчета собственных значений дискретной задачи	Узел				
	1	2	3	4	5
Метод конечных элементов [10]	122,78	76,546	53,003	41,672	39,719
Методы, приведенные в [10]	122,75	76,464	52,869	41,486	39,423
Ошибка, %	0,024	0,107	0,251	0,445	0,743
Предлагаемый алгоритм без насыщения	117,98	70,257	52,201	44,175	36,813

Заключение. Рассмотрены свободные колебания ортотропной цилиндрической оболочки конечной длины. Приведен современный алгоритм без насыщения [18]. Отмечено, что исследования в вычислительной математике в этом направлении за рубежом практически неизвестны. Только в настоящее время начались независимые исследования этих вычислительных методов за рубежом под названием «спектральные методы» [19], а также в виде современных $(h-p)$ -специализаций метода конечных элементов [20–22], в которых при измельчении сетки (при $h \rightarrow 0$) одновременно увеличивается степень полиномов, используемых при аппроксимации функций внутри одного конечного элемента. Остается лишь сожалеть, что к этому моменту работы Бабенко К.И. и его учеников оказались практически забыты. Из вычислительных экспериментов получено, что на сетках из $M = 5, 10, 20$ узлов (собственные значения дискретной задачи действительны и положительны) наблюдается сходимость алгоритма. Далее выполнены конкретные расчеты первого собственного значения (основного тона) на пяти узлах с четырьмя знаками после запятой. Проведено сравнение результатов численного анализа с данными работы [10].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ониашвили О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. М., Изд-во АН СССР, 1957.
- [2] Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Саакян Р.Д. Колебания тонкой упругой ортотропной круговой цилиндрической оболочки со свободным и шарнирно закрепленным краями. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, № 3, с. 453–465.
- [3] Ramesh T., Ganesan N. Orthotropic cylindrical shells with a viscoelastic core: a vibration and damping analysis. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 175, no. 4, pp. 535–555. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1344>
- [4] Ramasamy R., Ganesan N. Vibration and damping analysis of fluid filled orthotropic cylindrical shells with constrained viscoelastic damping. *Comput. Struct.*, 1999, vol. 70, no. 3, pp. 363–376. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00192-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00192-8)
- [5] Soedel W. Simplified equations and solutions for the vibration of orthotropic cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1983, vol. 87, no. 4, pp. 555–566. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(83\)90506-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(83)90506-0)
- [6] Upadhyay P., Mishra B. Non-axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1988, vol. 121, no. 1, pp. 149–160. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80067-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80067-1)
- [7] Ip K.H., Chan W.K., Tse P.C., et al. Vibration analysis of orthotropic thin cylindrical shells with free ends by the Rayleigh — Ritz method. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 195, no. 1, pp. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0407>

- [8] Wang H.-J., Chen L.-W. Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 737–755. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(03)00112-4)
- [9] Liu B., Xing Y., Qatu M., et al. Exact characteristic equations for free vibrations of thin orthotropic circular cylindrical shells. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 2, pp. 484–493. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.012>
- [10] Zhao J., Choe K., Zhang Y., et al. A closed form solution for free vibration of orthotropic circular cylindrical shells with general boundary conditions. *Compos. B. Eng.*, 2019, vol. 159, pp. 447–460. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.106>
- [11] Виноградов Ю.И. Анализ концентрации напряжений с контролируемой погрешностью в тонкостенных конструкциях (транспортно-пусковой стакан). *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2021, № 2, с. 110–123. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921020173>
- [12] Бакулин В.Н. Аппроксимации для моделирования напряженно-деформированного состояния слоистых цилиндрических оболочек. *Математическое моделирование*, 2004, т. 16, № 6, с. 101–105.
- [13] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.
- [14] Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954.
- [15] Бабенко К.И. Основы численного анализа. М., Наука, 1986.
- [16] Гавриков М.Б. Методы без насыщения в вычислительной математике. *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2019, № 75. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-75>
- [17] Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., URSS, 2016.
- [18] Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М., URSS, 2019.
- [19] Orszag S.A., Gotlib D. Numerical analysis of spectral methods. Philadelphia, SIAM, 1977.
- [20] Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithms and theory. Berlin, Springer Verlag, 2004.
- [21] Schwab C. P- and hp-finite element methods. New York, Clarendon Press, 1998.
- [22] Schwab C., Suri M., Xenophontos C. The hp-finite element method for problems in mechanics with boundary layers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1998, vol. 157, pp. 311–333. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00243-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00243-0)

Алгазин Сергей Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики и оптимизации конструкций ИПМех РАН (Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Алгазин С.Д. Свободные колебания ортотропной цилиндрической оболочки. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2023, № 3 (146), с. 4–14. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2023-3-4-14>

FREE OSCILLATIONS OF THE ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

S.D. Algazin

algazinsd@mail.ru

IPMech RAS, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper considers the problem of free oscillations of the orthotropic cylindrical shell of a finite length. This problem was intensively studied in USSR in the second half of the 20th century, but it did not lose its relevance now, for example, works of Dr. Sc. (Eng.) L.G. Gulgazaryan and others should be mentioned. The Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR Babenko K.I. presented briefly fundamentals of the theory of non-saturable numerical methods in his books. Research in computational mathematics in this area was not sufficiently promoted, and the results remain still practically unknown abroad. At present, actual rediscovery of the those computational methods was started in the West under the “spectral methods” name, as well as in the form of the modern (h - p)-specializations of the finite element method, where the grid was being refined (i.e., for $h \rightarrow 0$) simultaneously increasing the degree of polynomials used in approximation of functions within one finite element. Modern algorithm without saturation is presented, and specific calculations are considered showing its high efficiency

Keywords

Cylindrical shell, free oscillations, eigenvalue problems, numerical algorithm without saturation

Received 06.08.2022

Accepted 19.09.2022

© Author(s), 2023

The work was performed on the topic of the State Assignment no. 123021700050-1

REFERENCES

- [1] Oniashvilk O.D. *Nekotorye dinamicheskie zadachi teorii obolochek* [Some dynamic problems in shell theory]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1957.
- [2] Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Saakyan R.D. The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 3, pp. 312–322. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.07.009>

- [3] Ramesh T., Ganesan N. Orthotropic cylindrical shells with a viscoelastic core: a vibration and damping analysis. *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 175, no. 4, pp. 535–555. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1344>
- [4] Ramasamy R., Ganesan N. Vibration and damping analysis of fluid filled orthotropic cylindrical shells with constrained viscoelastic damping. *Comput. Struct.*, 1999, vol. 70, no. 3, pp. 363–376. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00192-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00192-8)
- [5] Soedel W. Simplified equations and solutions for the vibration of orthotropic cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1983, vol. 87, no. 4, pp. 555–566. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(83\)90506-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(83)90506-0)
- [6] Upadhyay P., Mishra B. Non-axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 1988, vol. 121, no. 1, pp. 149–160. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(88\)80067-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(88)80067-1)
- [7] Ip K.H., Chan W.K., Tse P.C., et al. Vibration analysis of orthotropic thin cylindrical shells with free ends by the Rayleigh — Ritz method. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 195, no. 1, pp. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0407>
- [8] Wang H.-J., Chen L.-W. Finite element dynamic analysis of orthotropic cylindrical shells with a constrained damping layer. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 737–755. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(03\)00112-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(03)00112-4)
- [9] Liu B., Xing Y., Qatu M., et al. Exact characteristic equations for free vibrations of thin orthotropic circular cylindrical shells. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 2, pp. 484–493. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.08.012>
- [10] Zhao J., Choe K., Zhang Y., et al. A closed form solution for free vibration of orthotropic circular cylindrical shells with general boundary conditions. *Compos. B. Eng.*, 2019, vol. 159, pp. 447–460. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.106>
- [11] Vinogradov Yu.I. Analysis of stress concentration with a controlled error in thin-walled structures (transport and launch container). *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 2, pp. 230–241. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565442102014X>
- [12] Bakulin V.N. Approximations for modelling of layer cylindrical shells. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2004, vol. 16, no. 6, pp. 101–105 (in Russ.).
- [13] Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974.
- [14] Goncharov V.L. Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy [Theory of interpolation and approximation of functions.]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1954.
- [15] Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1986.
- [16] Gavrikov M.B. Methods without saturation in computational mathematics. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], 2019, no. 75 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-75>
- [17] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Funktsionalnyy analiz i vychislitel'naya matematika [Functional analysis and computational mathematics]. Moscow, URSS Publ., 2016.

- [18] Algazin S.D. Chislennye algoritmy bez насыshcheniya v klassicheskikh zadachakh matematicheskoy fiziki [Numerical algorithms without saturation in classical problems of mathematical physics]. Moscow, URSS Publ., 2019.
- [19] Orszag S.A., Gotlib D. Numerical analysis of spectral methods. Philadelphia, SIAM, 1977.
- [20] Toselli A., Widlund O. Domain decomposition methods — algorithms and theory. Berlin, Springer Verlag, 2004.
- [21] Schwab C. P- and hp-finite element methods. New York, Clarendon Press, 1998.
- [22] Schwab C., Suri M., Xenophontos C. The hp-finite element method for problems in mechanics with boundary layers. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1998, vol. 157, pp. 311–333. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00243-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00243-0)

Algazin S.D. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Lead Research Fellow, Laboratory of Mechanics and Optimization of Designs, IPMech RAS (Vernadskogo prospekt 101, korp. 1, Moscow, 119526 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Algazin S.D. Free oscillations of the orthotropic cylindrical shell. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2023, no. 3 (146), pp. 4–14 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2023-3-4-14>