

## К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА НЕПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУСФЕРЫ

В.В. Горский<sup>1,2</sup>

vpk@vpk.npomash.ru

А.Г. Леонов<sup>1,2</sup>

vpk@vpk.npomash.ru

А.Г. Локтионова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> АО «ВПК «НПО машиностроения», г. Реутов, Московская обл.,  
Российская Федерация

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Качественное решение задачи о расчете конвективного теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое сопряжено с необходимостью численного интегрирования дифференциальных уравнений этого слоя, дополненных полуэмпирическими моделями турбулентной вязкости, апробированными на результатах экспериментальных исследований, выполненных в условиях, обеспечивающих моделирование газодинамической картины обтекания тела газовым потоком. С точки зрения практических приложений важным является разработка относительно простых методов расчета с высокой точностью. В настоящее время наиболее широкое распространение для решения указанных задач в авиационной и ракетно-космической технике получил метод эффективной длины, разработанный академиком В.С. Авдеевским. Отмечено, что при расчете высокотемпературных затупленных частей летательных аппаратов использование этого метода и стандартных моделей турбулентной вязкости сопряжено с внесением в расчет значительных ошибок. Приведено решение проблемы, основанное на построении систематических численных решений уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя с последующей их аппроксимацией. Показано, что применение данного подхода позволяет обеспечить как удовлетворительную точность расчета, так и простоту решения задачи

### Ключевые слова

*Конвективный теплообмен,  
пограничный слой, турбулентность, вязкость*

Поступила 28.09.2018

© Автор(ы), 2019

**Введение.** Как известно [1], методики, используемые для расчета ламинарно-турбулентного теплообмена, базируются либо на интегральных методах типа метода эффективной длины академика В.С. Авдеевского, либо на применении тех или иных полуэмпирических моделей расчета «кажущейся» турбулентной вязкости при численном интегрировании дифференциальных уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя. При этом указанные методики включают в себя набор констант, подобранных на базе согласования расчетных и экспериментальных данных, а получение последних сопряжено с большими техническими трудностями.

В работе [1] показано удовлетворительное соответствие результатов трубных экспериментов, метода эффективной длины академика В.С. Авдеевского и различных методик численного интегрирования уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя, используемых при расчетах на боковых поверхностях конусов. Однако вопросу сопоставления расчетных и экспериментальных данных для градиентных течений газа не уделено должного внимания, на что, в частности, и указано в работах [2, 3].

Необходимо отметить, что применению любых полуэмпирических расчетов ламинарно-турбулентного теплообмена должна предшествовать их апробация на экспериментальных данных, полученных как минимум в условиях газодинамического моделирования исследуемого явления.

Для расчета обтекания полусферы сверхзвуковым газовым потоком эта задача была решена в работах [2, 3] на базе расчетно-теоретического анализа экспериментальных данных [4, 5]. Показано, что использование метода эффективной длины и численного интегрирования уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя в сочетании с полуэмпирической моделью турбулентной вязкости Себечи — Смита [6] сопряжено с примерно полуторакратным превышением над экспериментальными данными результатов расчетных исследований.

Наряду с анализом сопоставления расчетных и экспериментальных литературных данных по ламинарно-турбулентному теплообмену на полусфере в работах [2, 3] предложены два варианта модификации стандартной модели турбулентной вязкости Себечи — Смита, обеспечивающие удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных. Более качественная из указанных модификаций, приведенная в работе [3], и используется при проведении настоящих исследований.

Цель настоящей работы — разработка метода расчета конвективного теплообмена на непроницаемой поверхности полусферы в ламинарно-турбулентном пограничном слое, основанного на результатах систематических численных решений уравнений этого слоя.

**Физико-математическая постановка задачи.** Рассмотрим задачу систематического исследования течения газа над непроницаемой поверхностью полусферы при численном интегрировании дифференциальных уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя.

Расчеты были проведены для полусферы радиусом 0,1 м в широком диапазоне изменения определяющих факторов:

- число Маха  $M_\infty$  в набегающем газовом потоке изменялось от 4 до 25;
- число Рейнольдса  $Re_{\infty,L}$ , рассчитанное по параметрам воздуха в набегающем потоке и характерному размеру тела  $L$ , в качестве которого принят радиус полусферы, — от  $10^6$  до  $10^8$ ;
- энтальпийный фактор  $R_h$ , равный отношению энтальпии газа при температуре стенки к энтальпии торможения набегающего газового потока, изменялся в пределах, соответствующих изменению температуры стенки от 300 К до температуры кипения атомарного углерода, но не превышал значения, равного 0,4.

При этом

- расчет давления и скорости идеального газа на поверхности тела проводился в рамках численного решения уравнений Эйлера;
- расчет эффекта завихренности течения идеального газа в пограничном слое выполнялся методом среднemasсовых величин [7];
- использовалось допущение о термодинамическом равновесии воздуха;
- расчет диффузионного массопереноса проводился в рамках закона бинарной диффузии;
- в качестве функции межмолекулярной потенциальной энергии применялся потенциал Леннарда — Джонса [8], а для расчета переносных свойств газовой смеси — метод Гиршфельдера [8];
- использовались кинетические константы потенциала Леннарда — Джонса, установленные в работе [9] на базе обеспечения оптимального описания коэффициента динамической вязкости равновесного воздуха, рассчитанного в четвертом приближении теории Чепмена — Энскога;
- численное интегрирование уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя выполнялось при единичном значении коэффициента перемежаемости.

**Сопоставление интенсивностей теплообмена на полусфере, полученных в рамках различных подходов.** Широко используемые на практике литературные рекомендации [1] по расчету турбулентного теплообмена на полусфере, полученные на базе метода эффективной длины [1],

включают в себя формулы, предназначенные для расчета максимального значения числа Стантона  $St_T^*$  и функции  $\Xi_T(s) = St_T(s)/St_T^*$ .

Эти формулы имеют вид

$$St^* = 16,4 (v_\infty / 1000)^{1,25} (\rho_\infty / 9,806)^{0,8} L^{-0,2} (1 + R_h)^{-2/3}; \quad (1)$$

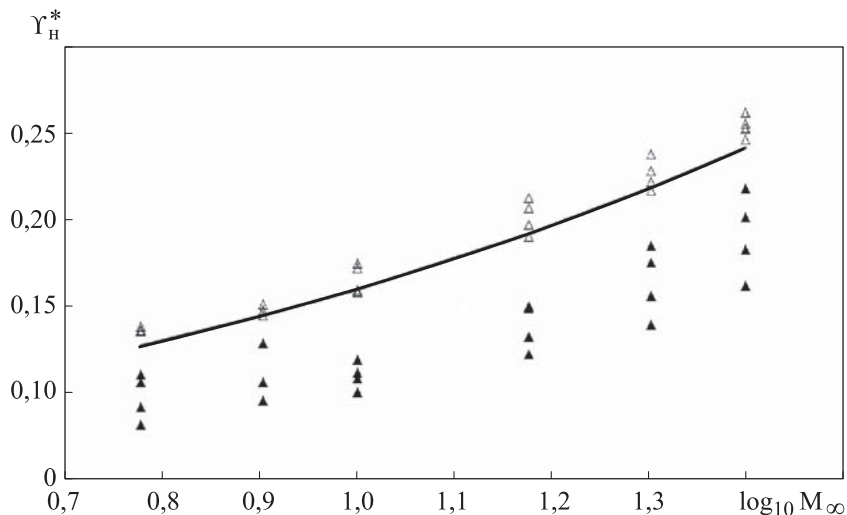
$$\Xi_T(s) = 3,75 \sin(s) - 3,5 \sin^2(s). \quad (2)$$

При этом единичному значению функции  $\Xi_T(s)$  соответствует величина ее аргумента, равная примерно  $\pi/5,6$  радиан. Здесь:  $v_\infty, \rho_\infty$  — скорость и плотность в набегающем потоке воздуха;  $s$  — длина криволинейной образующей полусферы в долях от ее радиуса, измеряемого в метрах.

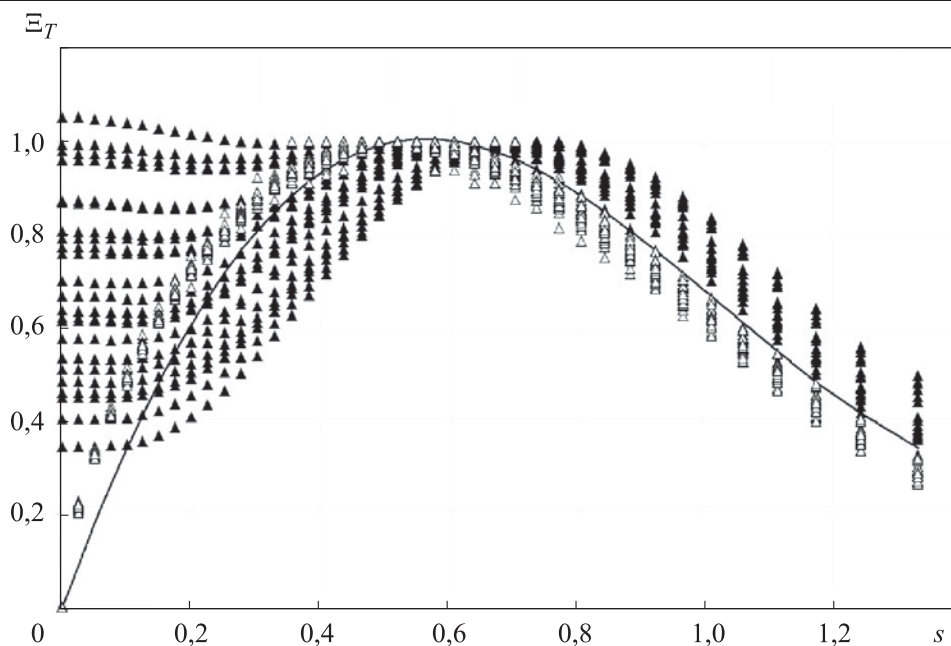
В области изменения температуры в набегающем потоке в пределах от 216 до 273 К, что соответствует условиям обтекания полусферы, рассмотренным в настоящей работе, формулу (1) с погрешностью не более 1 % можно привести к следующей критериальной форме записи:

$$\Upsilon_n^* = St^* Re^{0,2} (1 + R_h)^{2/3} = 0,0567 M_\infty^{0,45}. \quad (3)$$

На рис. 1 и 2 приведены результаты систематических исследований, выполненных в рамках различных подходов к определению этого критерия теплообмена. Светлые и зачерненные значки относятся к расчетам, выполненным в рамках метода эффективной длины и численного интегрирования уравнений пограничного слоя соответственно. В свою очередь, сплошные кривые построены с использованием формул (3) и (2).



**Рис. 1.** Зависимость максимального значения критерия теплообмена на полусфере от числа Маха в набегающем потоке воздуха

Рис. 2. Функциональная зависимость  $\Xi_T(s)$ 

В целом из рис. 1 и 2 следует, что:

- метод эффективной длины характеризуется крайне незначительной чувствительностью функций  $\Upsilon^*(M_\infty)$  и  $\Xi_T(s)$  по отношению к условиям в набегающем потоке воздуха;
- формулы (3) и (2) обеспечивают расчет функций  $\Upsilon^*(M_\infty)$ , проведенный по методу эффективной длины, с точностью, достаточной для большинства практических приложений;
- применение используемого метода численного интегрирования уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя приводит как к заметному изменению обеих функций, так и к столь же существенному повышению чувствительности их по отношению к условиям в набегающем газовом потоке.

В работах [2, 3] показано, что использование метода эффективной длины сопряжено с внесением в расчет определенного завышения интенсивности конвективного теплообмена на полусфере по сравнению с экспериментальными данными [4, 5]. Поэтому представляется вполне естественным различие между приведенными на рис. 1 и 2 данными, полученными методом эффективной длины и в результате численного интегрирования уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя.

В то же время для прикладных исследований важна разработка инженерного подхода к аппроксимации результатов, полученных при си-

стематическом численном интегрировании уравнений пограничного слоя, который был бы столь же эффективным, как и формула (3) для метода эффективной длины.

Анализируя приведенную информацию, отметим весьма значительную чувствительность обеих функций, полученных в рамках численного интегрирования уравнений пограничного слоя, практически исключающую возможность аппроксимации ее простой зависимостью типа (2). Отметим также, что подтверждается сделанный ранее вывод о важности решения задачи, направленной на построение эффективной инженерной методики расчета теплообмена на поверхности полусферы, аппроксимирующей приведенные результаты систематического численного интегрирования уравнений пограничного слоя.

**Метод расчета конвективного теплообмена.** В работе [10] предложен подход к описанию теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое, основанный на выделении из суммарной тепловой нагрузки той его части, которая обусловлена турбулентными пульсациями в газе.

Следуя этому подходу, на базе результатов, полученных в рамках систематических исследований, выполненных при численном интегрировании уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя методом работы [3], построена оптимальная аппроксимационная зависимость для приращения числа Стантона  $\Delta St^* = St^* - St_L^*$  от определяющих параметров в рамках предписания метода наименьших квадратов вида [11]

$$\Delta St_a^* = 0,01 M_\infty^{0,35} Re_{\infty,L}^{-0,11} (1 + R_h)^{-1,68}. \quad (4)$$

Здесь  $St_L^*$  — значение числа Стантона, рассчитанное в ламинарном пограничном слое, при значении координаты  $s$ , соответствующей максимуму функции  $\Delta St^*$ .

Эта зависимость построена с использованием одного из вариантов эвристического метода прямого поиска Хука — Дживса [12] и характеризуется среднеквадратической и максимальной погрешностями, равными соответственно 6 и 16 %.

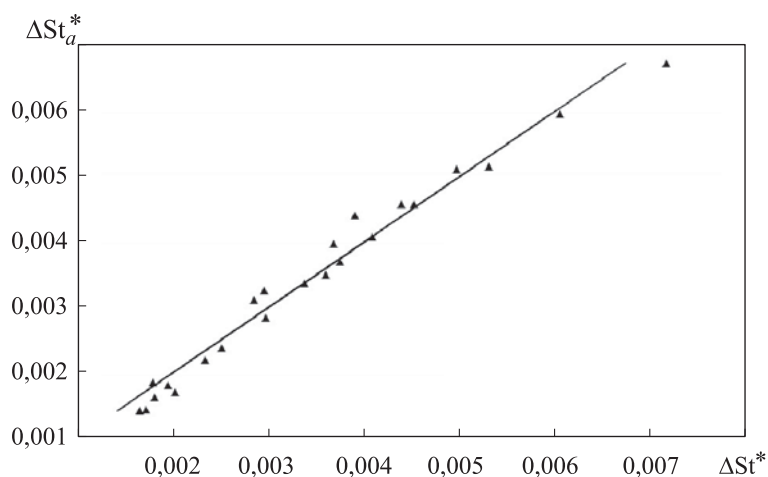
Качество данной аппроксимационной зависимости иллюстрирует также рис. 3.

На рис. 4 значками изображена совокупность функциональных зависимостей  $\Delta \Xi(s - s^*) = (St - St_L) / (St - St_L)^*$ , полученных для всех рассмотренных вариантов расчетов в рамках численного решения уравнений пограничного слоя. Здесь же приведена оптимальная аппроксимационная кривая, построенная по формулам

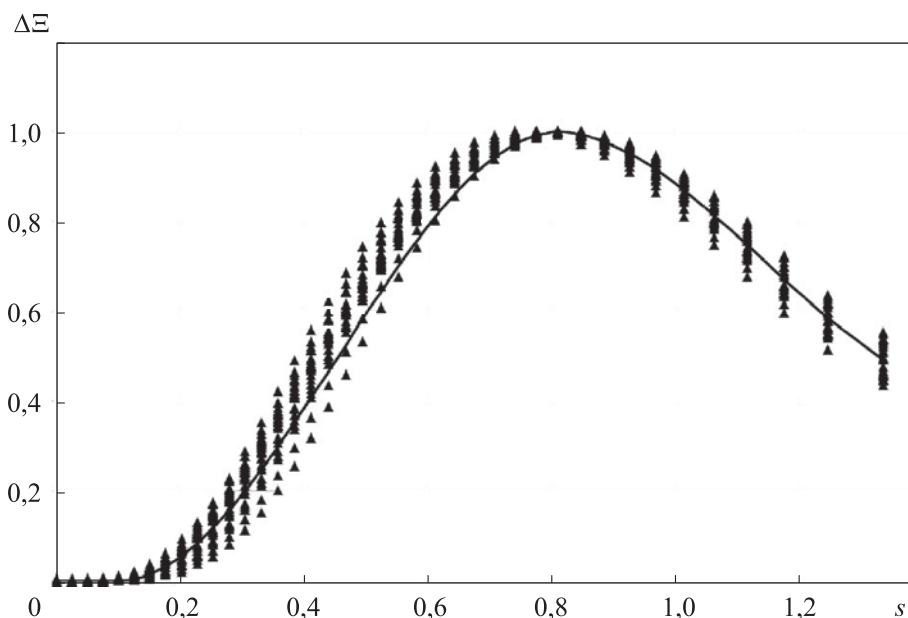
$$\Delta \Xi_a = \begin{cases} \xi^2 (2 - 2\xi), & s \leq s^*, \\ 1 + 3,69\zeta^3 - 3,72\zeta^2 - 0,04\zeta, & s > s^*; \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi = \max\left(0, \frac{s - s^*}{0,7} + 1\right); \quad \zeta = s - s^*.$$

При этом важно отметить, что для всех рассмотренных вариантов расчета величина  $s^*$  имеет фиксированное значение, равное  $\sim 0,808$ .



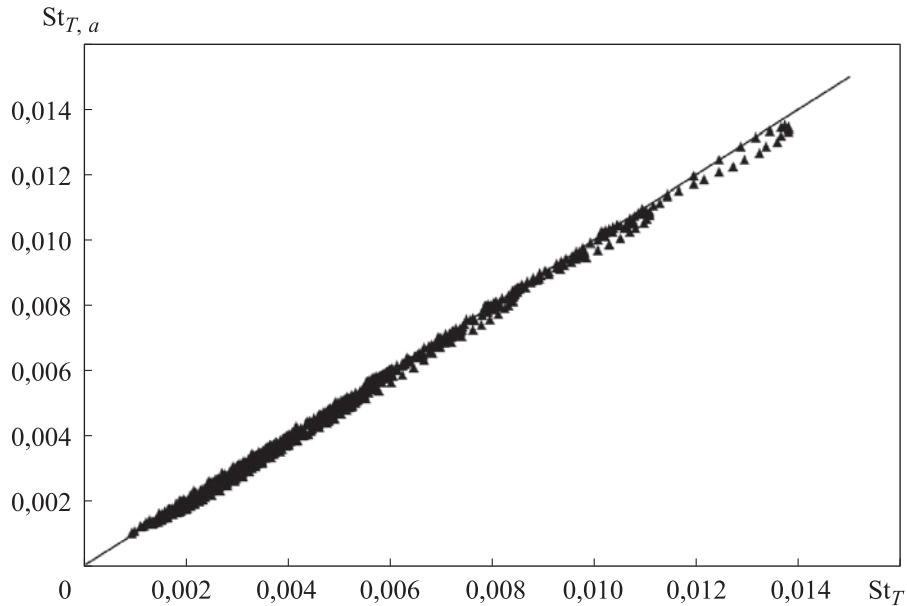
**Рис. 3.** Зависимость значений функции  $\Delta St^*$ , рассчитанных по предложенной инженерной методике, от их аналога, полученного численным интегрированием уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя



**Рис. 4.** Функциональная зависимость  $\Xi_T(s)$



На рис. 5 значками изображены данные о числе Стантона в ламинарно-турбулентном пограничном слое, рассчитанном с использованием разработанного инженерного метода повышенной точности, от его аналога, полученного при численном интегрировании уравнений пограничного слоя.



**Рис. 5.** Зависимость значений числа Стантона, рассчитанных по предложенной инженерной методике, от их аналога, полученного при численном интегрировании уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя

При этом использование предложенного инженерного метода решения рассматриваемой задачи характеризуется уровнем погрешности, приемлемым для большинства технических приложений, так как максимальная его погрешность составляет 13 %, а среднеквадратическая — 3 %.

**Вывод.** Предлагаемый новый метод расчета конвективного теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое на поверхности полусферы, обтекаемой сверхзвуковым воздушным потоком, пригоден для большинства практических приложений.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Землянский Б.А., ред. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М., Физматлит, 2014.
- [2] Горский В.В., Пугач М.А. Ламинарно-турбулентный теплообмен на поверхности полусферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха. *Ученые записки ЦАГИ*, 2014, т. 46, № 6, с. 36–42.



- [3] Горский В.В. Методика численного решения уравнений ламинарно-турбулентного пограничного слоя на проникаемой стенке затупленного тела вращения. *Космонавтика и ракетостроение*, 2017, № 3, с. 90–98.
- [4] Уидхопф Дж.Ф., Холл Р. Измерение теплопередачи на затупленном конусе под углом атаки при переходном и турбулентном режиме течения. *Ракетная техника и космонавтика*, 1972, т. 10, № 10, с. 71.
- [5] Widhopf G.F. Laminar, transitional and turbulent heat transfer measurement on a yawed blunt conical nosetip. *AIAA Journal*, 1972, vol. 10, no. 10, pp. 1318–1325.  
DOI: 10.2514/3.50376
- [6] Cebeci T., Smith A.M.O. Analysis of turbulent boundary layers. Academic Press, 1974.
- [7] Лунев В.В. Метод среднemasсовых величин во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. *Механика жидкости и газа*, 1967, № 1, с. 127.
- [8] Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИИЛ, 1961.
- [9] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.
- [10] Горский В.В., Пугач М.А. Оценка влияния вдува газа на конвективный теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничных слоях. *Ученые записки ЦАГИ*, 2016, т. 47, № 4, с. 34–43.
- [11] Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.
- [12] Аоки М. Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования. М., Наука, 1977.

**Горский Валерий Владимирович** — д-р техн. наук, главный научный сотрудник отделения аэродинамики и баллистики АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143966, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33), профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Леонов Александр Георгиевич** — д-р техн. наук, профессор, Генеральный директор, Генеральный конструктор АО «ВПК «НПО машиностроения» (Российская Федерация, 143966, Московская обл., г. Реутов, ул. Гагарина, д. 33), заведующий кафедрой «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Локтионова Анастасия Геннадьевна** — студентка аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Горский В.В., Леонов А.Г., Локтионова А.Г. К вопросу о расчете конвективного теплообмена в ламинарно-турбулентном пограничном слое на непроницаемой поверхности полусферы. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2019, № 3, с. 17–28. DOI: 10.18698/0236-3941-2019-3-17-28

**ON THE QUESTION OF COMPUTING CONVECTIVE HEAT TRANSFER PARAMETERS IN A LAMINAR-TO-TURBULENT BOUNDARY LAYER ON AN IMPERMEABLE HEMISPHERICAL SURFACE**

V.V. Gorskiy<sup>1,2</sup>

vpk@vpk.npomash.ru

A.G. Leonov<sup>1,2</sup>

vpk@vpk.npomash.ru

A.G. Loktionova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> JSC MIC NPO Mashinostroyeniya, Reutov, Moscow Region, Russian Federation

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

---

**Abstract**

In order to qualitatively solve the problem of computing convective heat transfer parameters in a laminar-to-turbulent boundary layer, it is necessary to numerically integrate differential equations describing that layer, completed by semi-empirical turbulent viscosity models. These must be validated using results of experimental investigations where the gas dynamics of a gas flow around a body is correctly simulated. In terms of practical applications, developing relatively simple yet highly accurate computation methods is important. At present, the most widely used method to solve this type of problems in aviation and aerospace engineering is the effective length method developed by V.S. Avduevskiy, Academician. The paper shows that significant errors characterise computations using this method and traditional turbulent viscosity models to determine parameters of those blunted components of aircraft that are subjected to the highest temperatures. We present a solution to this problem, based on constructing systematic numerical solutions to the equations describing the laminar-to-turbulent boundary layer and subsequently approximating them. We prove that this approach ensures both acceptable computation accuracy and solution simplicity

**Keywords**

*Convective heat transfer, boundary layer, turbulence, viscosity*

Received 28.09.2018

© Author(s), 2019

## REFERENCES

- [1] Zemlyanskiy B.A., ed. Konvektivnyy teploobmen letatel'nykh apparatov [Convective heat exchange of aircraft]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014.
- [2] Gorskiy V.V., Pugach M.A. Laminar-turbulent heat transfer on the surface of a hemisphere in hypersonic air flow. *TsAGI Science Journal*, 2014, vol. 45, no. 8, pp. 903–913. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2015013556
- [3] Gorskiy V.V. Numerical solution technique of laminar turbulent boundary layer equations on penetratable wall of blunt rotation body. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2017, no. 3, pp. 90–98 (in Russ.).
- [4] Uidkhopf Dzh.F., Khol R. Heat transfer measurement on blunt cone at the angle of attack in transient and turbulent flow regimes. *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika*, 1972, vol. 10, no. 10, pp. 71 (in Russ.).
- [5] Widhopf G.F. Laminar, transitional and turbulent heat transfer measurement on a yawed blunt conical nosetip. *AIAA Journal*, 1972, vol. 10, no. 10, pp. 1318–1325. DOI: 10.2514/3.50376
- [6] Cebeci T., Smith A.M.O. Analysis of turbulent boundary layers. Academic Press, 1974.
- [7] Lunev V.V. Method of mass-average quantities for the boundary layer in an outer flow with transverse nonuniformity. *Fluid Dyn.*, 1967, vol. 2, no. 1, pp. 83–86. DOI: 10.1007/BF01024813
- [8] Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B. The molecular theory of gases and liquids. Wiley-Interscience, 1964.
- [9] Gorskiy V.V., Fedorov S.N. An approach to calculation of the viscosity of dissociated gas mixtures formed from oxygen, nitrogen, and carbon. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2007, vol. 80, no. 5, pp. 948–953. DOI: 10.1007/s10891-007-0126-5
- [10] Gorskiy V.V., Pugach M.A. Estimation of the effect of free-stream turbulence and solid particles on the laminar turbulent transition at hypersonic speeds. *TsAGI Science Journal*, 2016, vol. 47, no. 1, pp. 15–28. DOI: 10.1615/TsAGISciJ.2016017056
- [11] Linnik Yu.V. Metod naimen'shikh kvadratov i osnovy teorii obrabotki nablyudeniy [Least square method and fundamentals of observation analysis theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1958.
- [12] Aoki M. Introduction to optimization techniques. Macmillan, 1971.

**Gorskiy V.V.** — Dr. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Department of Aerodynamics and Ballistics, JSC MIC NPO Mashinostroyeniya (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143966 Russian Federation); Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).


**Leonov A.G.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Director General and Designer General of JSC MIC NPO Mashinostroyeniya (Gagarina ul. 33, Reutov, Moscow Region, 143966 Russian Federation); Head of Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Loktionova A.G.** — student, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Gorskiy V.V., Leonov A.G., Loktionova A.G. On the question of computing convective heat transfer parameters in a laminar-to-turbulent boundary layer on an impermeable hemispherical surface. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 3, pp. 17–28 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3941-2019-3-17-28



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышел в свет учебник авторов  
**Н.Д. Чайнова, А.Н. Краснокутского,  
Л.Л. Мягкова**

**«Конструирование и расчет поршневых двигателей»**

Изложены основы конструирования и современные методы прочностного анализа поршневых и комбинированных двигателей внутреннего сгорания, приведен анализ конструкций современных отечественных и зарубежных двигателей, рассмотрены перспективы их развития. Наряду с традиционными методами расчетов на прочность базовых деталей двигателей представлены численные методы анализа теплового и напряженно-деформированного состояний элементов двигателей с применением современных информационных технологий.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности 101200 «Двигатели внутреннего сгорания» направления подготовки 141100 «Энергомашиностроение».

**По вопросам приобретения обращайтесь:**  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
+7 (499) 263-60-45  
press@bmstu.ru  
<http://baumanpress.ru>