

**ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ****А.А. Гурченков**  
**Н.Т. Вилисова**

challenge2005@mail.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Рассмотрены волновые движения идеальной жидкости во вращающихся бассейнах простых геометрических очертаний. Уравнения Эйлера, описывающие динамику идеальной жидкости, линеаризуются в рамках теории «мелкой воды». Проведены исследования о распространении длинных волн по поверхности идеальной жидкости в открытом вращающемся канале ограниченной ширины и конечной глубины. Задача сведена к дифференциальному уравнению в частных производных для возвышения свободной поверхности идеальной жидкости. Решение найдено в виде набора волн, бегущих вдоль канала. Показано, что во вращающихся каналах переменной глубины и при наличии хотя бы одной границы существуют волны Кельвина, волны Пуанкаре и низкочастотные волны Россби

**Ключевые слова**

*Идеальная жидкость, вращающийся канал, теория «мелкой воды», свободная поверхность, волна Кельвина*

Поступила в редакцию 16.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-05552-а)*

**Введение.** В настоящей работе рассмотрены задачи о распространении длинных волн по поверхности идеальной жидкости, помещенной во вращающийся бассейн конечной глубины. К длинным волнам принято относить такие волны, длина которых во много раз больше глубины бассейна, а амплитуда во много раз меньше глубины бассейна. Общеизвестна практическая значимость изучения таких волн для нужд безопасного надводного и подводного мореплавания, строительства гидротехнических сооружений, обеспечения устойчивости движения кораблей, самолетов [1, 2]. Кроме того, исследование длинноволновых процессов в прибрежной зоне океана необходимо для решения важных геофизических задач прогноза морских природных катастроф (в частности, цунами и так называемых волн-убийц), оценки перестройки прибрежного и донного рельефа, объяснения структуры и изменчивости вдольбереговых течений, выбора оптимальных морских путей, расчета динамики загрязняющих веществ. В работе основное внимание уделено нестационарной и нелинейной динамике захваченных и внутренних волн с приложениями к прогнозу морских природных катастроф.

Наиболее сильное влияние на крупномасштабные движения в прибрежной зоне океана оказывают захваченные волны. На них приходится 95...98 % энергии, которая может передаваться вдоль берега на большие расстояния без существенных потерь. До сих пор остается открытым вопрос о причине гораздо более высокой энергонасыщенности захваченных волн по сравнению с волнами откры-

того океана, несмотря на то обстоятельство, что область захвата волн, как правило, занимает лишь 5...10 % площади океана.

На движение длинных волн, пронизывающих всю толщу жидкости, большое влияние оказывает вращение Земли, которое приводит к интересным и своеобразным эффектам, в частности, к появлению граничных волн Кельвина. Учет силы Кориолиса, действующей на взволнованную жидкость во вращающемся бассейне, существенно усложняет аналитическое исследование задач, связанных с распространением длинных волн [3, 4].

Специфика длинных волн затрудняет эксперименты по моделированию явлений дифракции этих волн в бассейнах. Те эксперименты с вращающейся жидкостью, которые пока удастся осуществить в бассейнах небольших размеров, недостаточны для исследования процессов распространения длинных волн в реальных геофизических бассейнах.

В последние десятилетия бурно развиваются численные методы решения задач математической физики [5–7]. Однако применение ЭВМ для расчета движения длинных поверхностных волн сдерживается некоторыми трудностями. Главная из них — это отсутствие достаточно хороших и устойчивых алгоритмов расчета задач с граничными условиями. Кроме того, для исследования дифракций высокочастотных кельвинских волн численные методы малоприменимы. Поэтому большое значение в настоящее время приобретают аналитические и полуаналитические методы исследования длинных волн. Эти методы довольно сложны, а их применение сопряжено с некоторыми трудностями вследствие того, что граничное условие в этих гидродинамических задачах задается в виде линейной комбинации производной и ее неизвестной функции. Кроме того, аналитические решения позволяют лучше понимать физику рассматриваемых процессов, а также полезны при тестировании численного решения соответствующих задач. В частности, они позволяют корректно выбирать дискретные параметры (размер ячеек сетки, шаг интегрирования по времени и т. д.) схем численных методов при исследовании движения приливных волн [8–10].

Конечно, получение решения такими методами возможно лишь при существенном упрощении исходных уравнений и рассмотрении некоторых частных случаев течения.

**Постановка задачи.** Рассматриваются волновые движения идеальной жидкости в бассейнах простых геометрических очертаний. В такой упрощенной постановке задач удастся получить аналитические решения и тем самым выяснить некоторые общие закономерности движения волн. Волновые движения жидкости в прямоугольном канале шириной  $y = 2b$ , глубиной  $H$  и неограниченной длиной вдоль оси  $Ox$ , находящейся в состоянии равномерного вращения с угловой скоростью  $\omega_0$ , описываются уравнениями Эйлера в приближении теории «мелкой воды». Пренебрегая конвективной частью горизонтального ускорения и считая возвышение свободной поверхности  $\eta(x, y, t)$  малой величиной, получаем систему дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega_0 v_y &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\omega_0 v_x &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \tilde{H}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\eta(x, y, t)$  — ордината возмущенной свободной поверхности;  $\tilde{H} = Z_{st} - h_d$  — толщина жидкости ( $Z_{st}$  — уравнение невозмущенной свободной поверхности;  $z = h_d(x, y)$  — уравнение дна бассейна).

Граничное условие:

$$v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) = 0; \quad x, y \in L,$$

$L$  — горизонтальное сечение границы канала. Введем параметр Кориолиса  $f = 2\omega_0$ . Обозначая  $u = v_x \tilde{H}$ ,  $v = v_y \tilde{H}$  и исключая комбинацию  $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$  из системы уравнений (1), получаем дифференциальное уравнение для определения функции  $\eta(x, y, t)$  — формы свободной поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - g \nabla (\tilde{H} \nabla \eta) \right] - g f \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial n} = -f \frac{\partial \eta}{\partial s}, \quad (x, y) \in L, \quad (3)$$

где  $n$  — орт внешней нормали  $L$ ;  $s$  — орт касательной, направленный в сторону обхода  $L$  против хода часовой стрелки.

При этом уравнения для компонентов скорости имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + f^2 v_x &= -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial \eta}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} + f^2 v_y &= -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде  $\eta = \text{Re} \eta(y) e^{i(kx - \omega t)}$  — бегущая волна вдоль оси  $Ox$  с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ ;  $\eta(y)$  — амплитуда.

Для определения  $\eta(y)$  имеем уравнение

$$\eta'' + \frac{1}{\tilde{H}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \eta' + \left( \frac{\omega^2 - f^2}{g \tilde{H}} - k^2 + \frac{fk}{\omega \tilde{H}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right) \eta = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим случай переменной глубины канала  $\tilde{H} = \tilde{H}(y)$ .

Пусть глубина канала как функция  $y$  имеет вид

$$\tilde{H}(y) = D \left( 1 - s \frac{y}{2b} \right), \quad (6)$$

где наклон дна  $s \ll 1$ ,  $D$  — глубина канала при  $y = 0$ . Тогда  $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ ,

$\frac{\partial H}{\partial y} = -Ds \frac{1}{2b}$ , кроме того,  $\tilde{H}(y) = D$  при малых  $s$ .

С точностью до членов второго порядка малости по  $s$  получаем уравнение для определения функции  $\eta(y)$ :

$$\eta'' - s \frac{1}{2b} \eta' + \left( \frac{\omega^2 - f^2}{gD} - k^2 - \frac{sfk}{2\omega b} \right) \eta = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\eta' + \frac{fk}{\omega} \eta = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \quad (8)$$

Уравнение (7) — это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение (7) имеет вид

$$\eta(y) = \exp\left(s \frac{y}{4b}\right) (C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y), \quad (9)$$

где  $\lambda^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{gD} - k^2 - \frac{sfk}{2\omega b} - \frac{s^2}{16b^2} = \text{const.}$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получаем систему однородных линейных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned} C_1 \left[ \left( \frac{s}{4b} + \lambda \right) \sin \lambda b + \lambda \cos \lambda b \right] + C_2 \left[ -\lambda \sin \lambda b + \left( \frac{s}{4b} + \lambda \right) \cos \lambda b \right] &= 0; \\ C_1 \left[ -\left( \frac{s}{4b} + \lambda \right) \sin \lambda b + \lambda \cos \lambda b \right] + C_2 \left[ \lambda \sin \lambda b + \left( \frac{s}{4b} + \lambda \right) \cos \lambda b \right] &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Однородная система уравнений имеет нетривиальные решения, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель, получаем уравнение для собственных значений  $\omega$ :

$$(\omega^2 - f^2)(\omega^2 - k^2 gD) \sin 2\lambda b = 0. \quad (11)$$

**Анализ полученного решения.** Из уравнения (11) следует, что первые два множителя не изменились при переходе от задачи [4] для плоского дна ( $s = 0$ ).

Иначе говоря, при малых значениях  $s$  наклон дна не влияет на волну Кельвина. Корни  $\omega$ , соответствующие нулям третьего множителя  $\sin 2\lambda b = 0$ , имеют вид

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{2b}, \quad \lambda_n^2 = \frac{\omega^2 - f^2}{gD} - k^2 - \frac{sfk}{2\omega b} = -\frac{s^2}{16b^2}.$$

Откуда

$$\omega_n^2 - \frac{1}{2b} \frac{sfk}{\omega_n} - gD - \left( k^2 + \frac{n^2}{4b^2} \pi^2 + \frac{f^2}{gD} \right) = 0. \quad (12)$$

Решения уравнения (12) можно разбить на два класса. К первому классу отнесем частоты, превышающие параметр Кориолиса (высокочастотные волны), ко второму классу — частоты, имеющие порядок наклона дна. В первом случае таким частотам соответствуют волны Пуанкаре, для которых набор частот определяется уравнением

$$\omega_n^2 = +gD \left( k^2 + \frac{n^2}{4b^2} \pi^2 \right) + O(s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Уравнение (13) позволяет судить о том, что высокочастотные волны Пуанкаре не подвержены влиянию слабого наклона дна.

Третий корень кубического уравнения (12) имеет вид  $\omega_n = O(s)$ . Для этого корня член  $\omega_n^2$  пренебрежимо мал, а второй член с  $\omega_n$  имеет порядок  $O(1)$ . Это приводит к дисперсионному соотношению, описывающему топографические волны Россби:

$$\omega_n = -s \frac{f}{2bgD} \frac{k}{k^2 + \frac{n^2}{4b^2} \pi^2 + \frac{f^2}{gD}}. \quad (14)$$

Найдем максимальное значение для частот волн Россби в зависимости от волнового числа  $k$ . Дифференцируя (14) по  $k$  и приравнявая производную к нулю, получаем

$$\omega_n = \omega_{\max} = -s \frac{1}{2gD} \frac{f}{\sqrt{n^2 \pi^2 + 4 \frac{f^2 b^2}{gD}}}, \quad (15)$$

которая достигается при

$$k = \sqrt{\frac{n^2}{4b^2} \pi^2 + \frac{f^2}{gD}}. \quad (16)$$

Из (15) следует, что для малого наклона дна частота волны Россби меньше  $f$ .

Для существования волны Россби необходимо как наличие наклона дна, так и отличие от нуля параметра Кориолиса. Волна представляет собой низкочастотное колебание, период которого больше периода вращения системы коор-

динат. Интересно отметить, что фазовая скорость волны Россби в направлении, параллельном стенкам канала, отрицательна и имеет вид

$$U_x = \frac{\omega_n}{k} = -s \frac{f}{2bgD} \frac{1}{k^2 + \frac{n^2}{4b^2} \pi^2 + \frac{f^2}{gD}}. \quad (17)$$

Отметим, что для больших волновых чисел  $k$  частота волны Россби убывает с увеличением волнового числа, что отличает эту волну от волн Пуанкаре и Кельвина.

**Заключение.** В работе изучались различные виды крупномасштабных захваченных волн: волны Кельвина, шельфовые волны, топографические волны Россби, которые доминируют в зоне континентального склона, а также вблизи фронтальных разрезов. Наблюдения последних лет показали, что эти волны оказывают существенное влияние на разнообразные процессы в океане. Например, такие разнородные явления, как топографические вихри, изменение русла пограничных течений (Гольфстрима и др.), подъем на поверхность холодных масс воды вблизи берега, перенос донных материалов тесно связаны с захваченными волнами. Кроме того, они участвуют в формировании океанской циркуляции, приливов, штормовых нагонов, цунами и даже влияют на погоду и климат морей и океанов.

Такие волны влияют на движение подводных аппаратов, распространение акустических сигналов, размывы грунта под нефтяными и газовыми платформами. Внутренние волны наблюдаются также во многих озерах.

В работе рассмотрена задача для волн Кельвина в слое однородной вращающейся жидкости. Построенная теория позволила исследовать один из возможных нелинейных механизмов генерации волн Кельвина, а именно их возбуждение за счет нелинейного взаимодействия с волной Пуанкаре.

Представление о важной роли волн Россби в жизни океана сформировалось сравнительно недавно. Выяснилось, что существенная для многих приложений (например, для мореплавания, рыболовства или гидроакустики) конкретная океанографическая «погода» определяется именно волнами Россби и тесно связанными с ними сугубо нелинейными индивидуальными образованиями в виде синоптических вихрей и рингов.

Кроме того, волны Россби играют важную роль в перераспределении энергии в масштабах всего Мирового океана, так как энергия течений в результате их неустойчивости передается главным образом волнам Россби, а они, в свою очередь, способствуют крупномасштабному обмену по горизонтали. Наблюдения показали, что в океанах существуют глобальные вихри — размером в целый океан. Это, по существу, зональные течения, в которых северная часть из-за наличия континентов замыкается на южную. Можно сказать, что течения приобретают дополнительный импульс в западном направлении от волн Россби. В силу гироскопического эффекта (или, что то же самое, под влиянием силы Кориолиса) это приводит к формированию таких глобальных течений, как Гольфстрим, Куроисио и др. Существование планетарных волн Россби обусловлено широтным изменением

параметра Кориолиса, однако над наклонным дном могут существовать волны Россби, даже когда этот параметр постоянен. Именно этот случай был рассмотрен в работе и получил теоретическое обоснование. Захваченные волны сейчас активно исследуются как экспериментально, так и с помощью гидродинамического моделирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гурченков А.А. Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося тела. М.: Физматлит, 2010. 221 с.
2. Чесноков А.А. Характеристические свойства и точные решения кинетического уравнения пузырьковой жидкости // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 3. С. 41–50.
3. Лятидецкий В.Ю., Чесноков А.А. Докритические и сверхкритические горизонтально-сдвиговые течения в открытом канале переменного сечения // Известия РАН. Механика жидкостей и газа. 2009. № 6. С. 123–138.
4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. В 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 400 с. Т. 2. 411 с.
5. Чесноков А.А. Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 5. С. 41–54.
6. Chesnokov A.A. Symmetries and exact solutions of the rotating shallowwater equations // Europ. J. Appl. Math. 2009. Vol. 20. No. 5. P. 461–477.
7. Чесноков А.А. Волновые движения жидкости во вращающемся параболическом бассейне // Сб. трудов XIII Всероссийской конференции «Современные проблемы математического моделирования». Дюрсо: ЮГИНФО, ЮФУ, 2009. С. 442–449.
8. Иванов М.И. О горизонтальной структуре приливных колебаний атмосферы // Известия РАН. Механика жидкостей и газа. 2008. № 3. С. 125–139.
9. Калашник М.В., Кахиани В.О., Патарашивили К.И., Цакадзе С.Дж. Переходный процесс в слое жидкости во вращающемся параболоиде при скачкообразном изменении его угловой скорости // Известия РАН. Механика жидкостей и газа. 2008. № 3. С. 53–63.
10. Брысин А.Н., Никифоров А.Н., Татусь Н.А. Собственные колебания вращающейся жидкости со свободной поверхностью, распространяющиеся не вдоль оси ротора с радиальными перегородками // Сборник трудов XVIII Международного симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». DYVIS-2015. М.–Бекасово: ИМАШ РАН, 2015. С. 77–81.

**Гурченков Анатолий Андреевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Вилисова Нина Трофимовна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

### Просьба сослаться на эту статью следующим образом:

Гурченков А.А., Вилисова Н.Т. Вихревые движения жидкости в открытых вращающихся каналах переменной глубины // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. № 1. С. 101–109. DOI: 10.18698/0236-3941-2018-1-101-109

## VORTEX MOTION OF FLUID IN ROTATING CHANNELS OF VARIABLE DEPTH

A.A. Gurchenkov  
N.T. Vilisova

challenge2005@mail.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

### Abstract

The article considers the wave motion of a perfect fluid in rotating channels of simple geometric shapes. The Euler equations describing the dynamics of the perfect fluid are linearized within the "shallow water" theory. The paper examines the spread of long waves along the perfect fluid surface in an open rotating channel of limited width and finite depth. The task is reduced to a partial differential equation for elevation of perfect fluid free surface. The article suggests the solution as a set of waves running both along and across the channel. The paper shows that there are Kelvin, Poincaré waves and low-frequency Rossby waves in rotating channels of variable depth with the presence of at least one boundary

### Keywords

*Perfect fluid, rotating channel, theory of "shallow water", free surface shape, Kelvin waves*

Received 16.05.2017

© BMSTU, 2018

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 15-01-05552-a)*

### REFERENCES

- [1] Gurchenkov A.A. Dinamika zavikhrennoy zhidkosti v polosti vrashchayushchegosya tela [Fluid vortex dynamics in spinning body cavity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 221 p.
- [2] Chesnokov A.A. Characteristic properties and exact solutions of the kinetic equation of bubbly liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 336–343. DOI: 10.1023/A:1023477022213 Available at: <https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1023477022213>
- [3] Lyapidevskiy V.Yu., Chesnokov A.A. Sub- and supercritical horizontal-shear flows in an open channel of variable cross-section. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 903–916. DOI: 10.1134/S0015462809060143 Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0015462809060143>
- [4] Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. New York, Springer-Verlag, 1979. 626 p.
- [5] Chesnokov A.A. Symmetries and exact solutions of the shallow water equations for a two-dimensional shear flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 5, pp. 737–748. DOI: 10.1007/s10808-008-0092-5 Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10808-008-0092-5>
- [6] Chesnokov A.A. Symmetries and exact solutions of the rotating shallowwater equations. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 447–460. DOI: 10.1134/S0015462808030125 Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134/S0015462808030125>
- [7] Chesnokov A.A. Fluid wave motion in rotating parabolic water tank. *Sb. trudov XIII Vse-rossiyskoy konferentsii «Sovremennye problemy matematicheskogo modelirovaniya»* [Proc. XIII



Russ. Conf. "Modern problems of mathematical modelling"]. Dyrurso, YuGINFO, YuFU, 2009. Pp. 442–449 (in Russ.).

[8] Ivanov M.I. Horizontal structure of atmospheric tidal oscillations. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkostey i gaza*, 2008, no. 3, pp. 125–139 (in Russ.).

[9] Kalashnik M.V., Kakhiani V.O., Patarashvili K.I., Tsakadze S.J. Transition process in a fluid layer in a rotating paraboloid in response to a sudden change in its angular velocity. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 380–389. DOI: 10.1134/S001546280803006X  
Available at: <https://link.springer.com/article/10.1134/S001546280803006X>

[10] Brysin A.N., Nikiforov A.N., Tatus' N.A. Free oscillations of rotating fluid with free surface propagating not along the axis of the rotor with radial baffles. *Sbornik trudov XVIII Mezhdunarodnogo simpoziuma «Dinamika vibroudarnykh (sil'no nelineynykh) sistem»*. DYVIS-2015 [Proc. XVIII Int. Symp. "Dynamics of shock-vibrating (highly nonlinear) systems". DYVIS-2015]. Moscow, Bekasovo, IMASh RAN PUBL., 2015. Pp. 77–81.

**Gurchenkov A.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Vilisova N.T.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Gurchenkov A.A., Vilisova N.T. Vortex Motion of Fluid in Rotating Channels of Variable Depth. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2018, no. 1, pp. 101–109 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3941-2018-1-101-109