

**ТЕМПЕРАТУРНОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОЯ  
ПОЛУПРОЗРАЧНОГО МАТЕРИАЛА С ЗАВИСЯЩИМИ  
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ  
И ПОГЛОЩЕНИЕМ ПРОНИКАЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

**В.С. Зарубин**

fn2@bmstu.ru

**Г.Н. Кувыркин**

fn2@bmstu.ru

**И.Ю. Савельева**

fn2@bmstu.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

---

**Аннотация**

Приведена дифференциальная форма математической модели, описывающей установившийся процесс переноса тепловой энергии в плоском или круговом цилиндрических слоях при проникающем излучении. Теплопроводность полупрозрачного материала этих слоев зависит от температуры, а сам материал обладает свойством поглощать проникающее излучение с интенсивностью, нелинейно возрастающей с увеличением локального значения температуры. С использованием вариационной формулировки нелинейной задачи стационарной теплопроводности проведено преобразование дифференциальной формы модели к вариационной форме, включающей функционал, анализ стационарных точек которого позволяет установить условия, определяющие реализуемость установившегося температурного состояния рассматриваемого слоя

**Ключевые слова**

*Проникающее излучение, объемное энерговыделение, вариационная форма математической модели, стационарная точка функционала*

Поступила в редакцию 30.01.2017

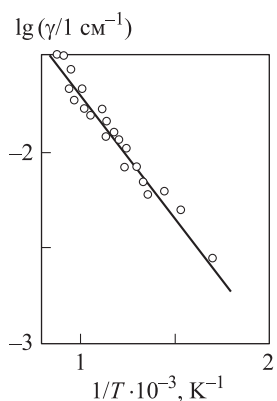
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

**Введение.** Используемые в технике полупрозрачные теплозащитные и конструкционные материалы в условиях радиационного воздействия поглощают излучение как на поверхности, так и в объеме [1]. Объемное поглощение проникающего излучения полупрозрачными материалами и элементами конструкций происходит при технологических операциях и рабочих режимах различных технических устройств. Этот процесс может не только существенно повлиять на работоспособность конструкции, выполненной из такого материала [2], но и привести к неустойчивости температурного состояния, характерной для явлений теплового взрыва [3, 4].

Согласно закону Бугера [5], плотность потока проникающего излучения и его энергия при прохождении через слой материала убывают по экспоненциальному закону по мере увеличения расстояния от облучаемой поверхности слоя. При этом некоторая доля энергии рассеивается и излучается в объеме материала, а оставшая часть поглощается [6, 7]. Основу математической модели, описывающей эти процессы, составляет уравнение переноса энергии излучения [1, 6].

Количественная оценка степени влияния проникающего излучения на температурное состояние материалов и элементов конструкций может быть получена при математическом моделировании термомеханических процессов [8–10]. При этом закон Бугера применяется и в том случае, когда допустимо пренебречь



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента поглощения лазерного стекла от обратной температуры [12]

объемным излучением и рассеянием в материале проникающего излучения, но необходимо учитывать его поглощение. Тогда отрицательный показатель экспоненциальной функции представляют произведением расстояния от облучаемой поверхности и интегрального или некоторого усредненного коэффициента поглощения, постоянного для данного материала и спектрального состава проникающего излучения. Но с увеличением мощности проходящего через слой материала излучения возникает зависимость коэффициента поглощения от локальной интенсивности этого излучения [7]. Кроме того, может быть существенной зависимость этого коэффициента от локального значения температуры материала [11]. Такой процесс можно описать функцией распределения Больцмана [6], что находит экспериментальное подтверждение [12]. На рис. 1 приведены результаты обработки экспериментальных данных для лазерного стекла ГЛС1, из которых следует, что зависимость от температуры  $T$  коэффициента поглощения может быть представлена в виде

$$\gamma(T) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{W}{k_0 T}\right), \quad (1)$$

где  $\gamma_0$  — предэкспоненциальный коэффициент;  $W$  — энергия активации;  $k_0 = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана.

В настоящей работе на основе вариационной формулировки нелинейной задачи стационарной теплопроводности в твердом теле [13] построена и проанализирована математическая модель, описывающая распределение температуры в плоском или круговом цилиндрическом слое полупрозрачного материала для случая, когда зависимость коэффициента поглощения проникающего излучения этим материалом в соотношении для закона Бугера зависит от локального значения температуры, согласно соотношению (1). Эта модель включает в себя функционал, который может иметь несколько стационарных точек, соответствующих различным установившимся температурным состояниям в рассматриваемом слое. Анализ свойств этого функционала позволяет выделить стационарные точки, соответствующие устойчивым и неустойчивым распределениям температуры.

**Постановка задачи.** Пусть плоский или круговой цилиндрические слои однородного полупрозрачного материала с зависящим от температуры  $T$  ко-

эффицентом теплопроводности  $\lambda(T)$  имеют толщину  $h$ . Одна из поверхностей плоского слоя и внутренняя поверхность цилиндрического слоя радиусом  $r_0$  идеально теплоизолированы, а на противоположной поверхности каждого из слоев происходит конвективно-радиационный теплообмен с внешней средой, имеющей температуру  $T^*$ . Интенсивность конвективного теплообмена определяет коэффициент теплообмена  $\alpha_0 = \text{const}$ . Падающий на поверхность теплообмена поток излучения плотностью  $q_0 = \text{const}$  частично отражается, частично поглощается на поверхности и частично проникает внутрь пластины. Соответствующие доли плотности этого потока определяют коэффициенты  $A$  поглощения,  $R$  отражения и  $D$  пропускания, которые в литературе по радиационному теплообмену обычно называют поглощательной, отражательной и пропускательной способностями [6]. Значения этих безразмерных коэффициентов удовлетворяют равенству  $A + R + D = 1$ .

Примем, что прошедший через поверхность теплообмена поток излучения плотностью  $Dq_0$  поглощается в объеме слоя в силу уменьшения его плотности, согласно закону Бугера:

$$q_*(z) = Dq_0 \exp(-\gamma(T)(h-z)), \quad (2)$$

где  $z$  — координата, отсчитываемая от идеально теплоизолированной поверхности слоя по нормали к ней в сторону поверхности теплообмена. Установившееся распределение  $T(z)$  температуры в рассматриваемом слое удовлетворяет нелинейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка [14]:

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dz} \left( r^n \lambda(T) \frac{dT(z)}{dz} \right) + q_V(T, z) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $n = 0$  для плоского слоя и  $n = 1$  для кругового цилиндрического слоя при  $r = r_0 + z$ , а  $q_V(T, z)$  — зависящая от температуры и координаты объемная мощность энерговыделения, измеряемая в Вт/м<sup>3</sup> и с учетом формулы (2) равная

$$q_V(T, z) = \frac{dq_*(z)}{dz} = Dq_0 \gamma(T) \exp(-\gamma(T)(h-z)). \quad (4)$$

На поверхностях слоя должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\left. \frac{dT(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \lambda(T) \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=h} + \alpha_0 (T(h) - T^*) - Aq_0 + \varepsilon_0 \sigma_0 (T(h))^4 = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0$  — коэффициент излучения поверхности (ее излучательная способность), а  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) — постоянная Стефана — Больцмана.

Уравнение (3) и граничные условия (5) входят в дифференциальную форму математической модели, описывающей установившееся распределение темпе-

ратуры в рассматриваемом слое. Для количественного анализа этой модели необходимо использовать приближенные методы [15], поскольку для сформулированной нелинейной задачи стационарной теплопроводности в общем случае не удастся получить точное аналитическое решение. В случае нелинейной задачи возможна неединственность решения, выявить которую при использовании известных приближенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений достаточно трудно. В такой ситуации одна из возможностей выявления неединственности решения задачи связана с переходом от дифференциальной формы математической модели к эквивалентной вариационной форме.

**Вариационная форма математической модели.** Для перехода к вариационной форме модели предварительно введем с помощью подстановки Кирхгофа [14] функцию

$$\psi(T) = \int_{T_*}^T \lambda(T) dT, \quad (6)$$

называемую обычно потенциалом теплопроводности. Здесь  $T_*$  — нижняя грань множества возможных значений температуры в рассматриваемом слое полупрозрачного материала. Разделив обе части равенства (6) на  $\lambda_* T_*$ , где  $\lambda_* = \lambda(T_*)$ , запишем

$$\Psi(\theta) = \frac{\psi(T)}{\lambda_* T_*} = \int_1^\theta \Lambda(\theta) d\theta, \quad (7)$$

где  $\theta = T/T_*$  и  $\Lambda(\theta) = \lambda(T)/\lambda_*$ .

Поскольку  $\Lambda(\theta) > 0$ , функция  $\Psi(\theta)$  является возрастающей при увеличении безразмерной температуры  $\theta$  и имеет взаимно однозначную обратную функцию  $\theta(\Psi)$ , также возрастающую, но при увеличении  $\Psi$ . Тогда уравнение (3) с учетом равенств (1), (4) и (7) можно привести к виду

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \bar{r}^n \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \right) + \beta F(\theta(\Psi)) \exp(-\gamma(1-\zeta)F(\theta(\Psi))) \bar{r}^n = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\zeta = z/h$ ,  $\bar{r} = r/h$ ,  $\beta = \gamma_0 D q_0 h^2 / (\lambda_* T_*)$ ,  $F(\theta(\Psi)) = \exp(-\mu/\theta(\Psi))$ ,  $\mu = W/(k_0 T_*)$  и  $\gamma = \gamma_0 h$ . Граничные условия (5) перейдут в равенства

$$\frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} + \alpha (\theta(\Psi(1)) - \theta^*) + \varepsilon (\theta(\Psi(1)))^4 = 0, \quad (9)$$

где  $\alpha = \alpha_0 h / \lambda_*$ ,  $\theta^* = (T^* + A q_0 / \alpha_0) / T_*$  и  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sigma_0 T_*^3 / \lambda_*$ .

Связь вариационной формы математической модели с дифференциальной формой этой модели состоит в том, что в стационарных точках функционала, составляющего основу вариационной формы, должны быть выполнены

соотношения (8) и (9), входящие в дифференциальную форму. Построить такой функционал можно следующим путем.

Умножим уравнение (8) на вариацию  $\delta\Psi(\zeta)$  и, проинтегрировав это произведение по толщине слоя полупрозрачного материала, запишем

$$\int_0^1 \frac{d}{d\zeta} \left( \bar{r}^n \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \right) \delta\Psi(\zeta) d\zeta + \beta \int_0^1 F(\theta(\Psi)) \exp(-\gamma(1-\zeta)F(\theta(\Psi))) \delta\Psi(\zeta) \bar{r}^n d\zeta = 0.$$

После вычисления первого интеграла в левой части этого равенства получаем

$$(\bar{r}_0 + 1)^n \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} \delta\Psi(1) - \bar{r}_0^n \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta\Psi(0) - \int_0^1 \bar{r}^n \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \delta \frac{\Psi(\zeta)}{d\zeta} \bar{r}^n d\zeta,$$

где  $\bar{r}_0 = r_0/h$ . Заменяв первый интеграл этим результатом и вычитая после этого указанное равенство из результатов умножения второго равенства (7) на  $(\bar{r}_0 + 1)^n \delta\Psi(1)$  и первого равенства на  $-\bar{r}_0^n \delta\Psi(0)$ , запишем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \delta \frac{\Psi(\zeta)}{d\zeta} \bar{r}^n d\zeta - \beta \int_0^1 F(\theta(\Psi)) \exp(-\gamma(1-\zeta)F(\theta(\Psi))) \delta\Psi(\zeta) \bar{r}^n d\zeta + \\ & + \left( \alpha(\theta(\Psi(1)) - \theta^*) + \varepsilon(\theta(\Psi(1)))^4 \right) (\bar{r}_0 + 1)^n \delta\theta(1) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство (10) с учетом правила вычисления вариации интеграла с переменным верхним пределом [16, 17] соответствует условию  $\delta J[\theta, \delta\theta] = 0$  стационарности [13, 16] функционала

$$\begin{aligned} J[\Psi] = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 \bar{r}^n d\zeta - \beta \int_0^1 \bar{r}^n d\zeta \int_0^{\Psi(\zeta)} F(\theta(\Psi)) \exp(-\gamma(1-\zeta)F(\theta(\Psi))) d\Psi + \\ & + \left( \frac{\alpha}{2} \int_0^{\Psi(1)} \theta(\Psi) d\Psi - \alpha\theta^* \Psi(1) + \frac{\varepsilon}{5} \int_0^{\Psi(1)} (\theta(\Psi))^4 d\Psi \right) (\bar{r}_0 + 1)^n. \end{aligned} \quad (11)$$

Этот функционал допустимо рассматривать на множестве непрерывных на отрезке  $[0; 1]$  и кусочно дифференцируемых в интервале  $(0; 1)$  функций  $\Psi(\zeta)$ .

В стационарной точке функционал (11), соответствующий задаче стационарной теплопроводности при нелинейной зависимости от температуры объемной мощности энерговыделения в слое полупрозрачного материала, может принимать экстремальные значения (минимальное или максимальное), причем возможно объединение экстремальных точек в точку перегиба на графике зависимости этого функционала от одного из определяющих параметров. Данному функционалу, реализуемому в слое установившегося распределения температуры, отвечают лишь точки минимума, а стационарные точки иного типа соответствуют распределениям, которые неустойчивы в качестве установившихся [14].

Типы стационарных точек удается установить путем исследования свойств функционала (11).

**Анализ стационарных точек функционала.** В целях сокращения числа параметров при анализе стационарных точек функционала (11) вместо граничного условия на поверхности теплообмена слоя полупрозрачного материала при  $\zeta = 1$ , определяемого вторым равенством (9), зададим на этой поверхности значение  $\theta_* = 1$  безразмерной температуры и ограничимся рассмотрением плоского слоя. В этом случае  $\Psi(1) = 0$  и функционал (11) примет вид

$$J_1[\Psi] = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 - \beta \int_0^{\Psi(\zeta)} F(\theta(\Psi)) \exp(-\gamma(1-\zeta)F(\theta(\Psi))) d\Psi \right) d\zeta, \quad (12)$$

а допустимые функции  $\Psi(\zeta)$  теперь должны удовлетворять равенству  $\Psi(1) = 0$ . Из формулы (12) следует, что функционал  $J_1$  зависит от параметров  $\beta$ ,  $\gamma$ , а также от вида функции  $F(\theta(\Psi))$  и допустимой для этого функционала функции  $\Psi(\zeta)$ , аппроксимирующей истинное распределение  $\Psi^*(\zeta)$  безразмерного потенциала теплопроводности по толщине рассматриваемого слоя.

Зависимость коэффициента теплопроводности полупрозрачного материала от температуры примем в виде  $\lambda(T) = \lambda_* \exp(a(T - T_*))$ , причем коэффициент  $a$  может быть как положительным, так и отрицательным (в частном случае при  $a = 0$  коэффициент теплопроводности не зависит от температуры). Тогда из соотношения (7) получим  $\nu\Psi(\theta) = \exp(\nu(\theta - 1)) - 1$ , где  $\nu = aT_*$ . Отсюда следует формула для обратной функции

$$\theta(\Psi) = 1 + (1/\nu) \ln(1 + \nu\Psi). \quad (13)$$

Тогда получим

$$F(\theta(\Psi)) = \exp\left(-\frac{\mu}{1 + (1/\nu)\ln(1 + \nu\Psi)}\right). \quad (14)$$

Используем в качестве допустимой функцию  $\Psi_1(\zeta) = B_1(1 - \zeta^2)$ . Эта функция удовлетворяет не только условию  $\Psi(1) = 0$ , но и граничному условию на идеально теплоизолированной поверхности при  $\zeta = 0$ , определяемому первым равенством (9). Формула (13) позволяет от функции  $\Psi_1(\zeta)$  перейти к функции  $\theta_1(\zeta)$ , описывающей соответствующее распределение безразмерной температуры по толщине рассматриваемого плоского слоя полупрозрачного материала. Коэффициент  $B_1$  имеет смысл перепада безразмерного потенциала теплопроводности по толщине этого слоя. Его следует найти из условия  $\partial J_1 / \partial B_1 = 0$  стационарности функционала (12) после подстановки функции  $\Psi_1(\zeta)$  в этот функционал. В итоге с учетом формулы (14) получим трансцендентное уравнение

$$\frac{4}{3} B_1 - \beta \int_0^1 (1 - \zeta^2) \exp\left(\frac{-\mu \nu}{\nu + \ln(1 + \nu B_1 (1 - \zeta^2))} - \gamma(1 - \zeta) \exp\left(\frac{-\mu \nu}{\nu + \ln(1 + \nu B_1 (1 - \zeta^2))}\right)\right) d\zeta = 0, \quad (15)$$

явно неразрешимое относительно коэффициента  $B_1$ . Но связь  $B_1$  с параметром  $\beta$  можно представить графически в виде зависимости  $\beta$  от  $B_1$  при фиксированных значениях  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $\nu$ .

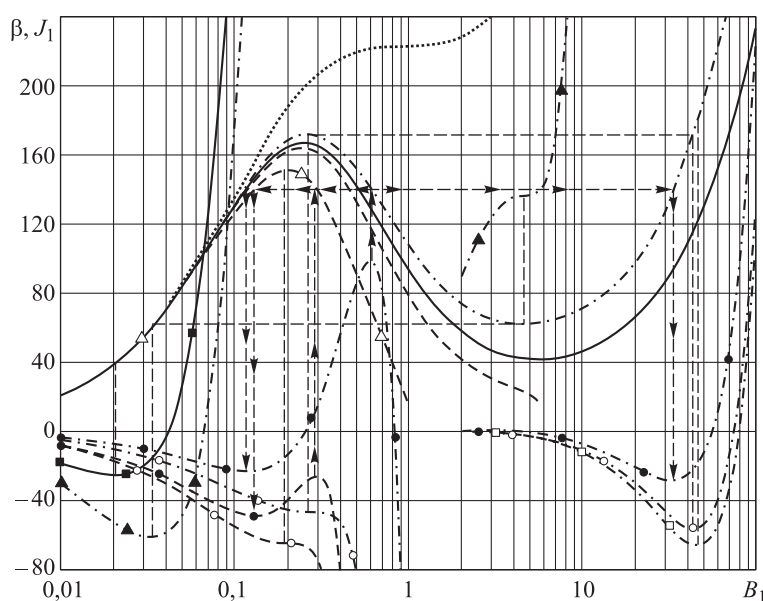


Рис. 2. Зависимости параметра  $\beta$  и функционала  $J_1$  от коэффициента  $B_1$

На рис. 2 в полулогарифмических координатах с использованием уравнения (15) приведены графики такой зависимости при гипотетически принятых значениях  $\gamma = 0,11$ ,  $\mu = 7$  и пяти значениях  $\nu$ : 1,9 — пунктирная, 0,2 — штрихпунктирная, -0,2 — штриховая, -1 — штриховая со светлыми треугольниками и 0 — сплошная кривые. В случае  $\nu = 0$  уравнение (15) после предельного перехода при  $\nu \rightarrow 0$  в формуле (13) примет вид

$$\frac{4}{3} B_1 - \beta \int_0^1 (1 - \zeta^2) \exp\left(\frac{-\mu}{1 + B_1 (1 - \zeta^2)} - \gamma(1 - \zeta) \exp\left(\frac{-\mu}{1 + B_1 (1 - \zeta^2)}\right)\right) d\zeta = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (15) следует, что в случае  $\nu < 0$  оно определено лишь при  $|B_1| < 1/|\nu|$ . Тогда зависимость  $\beta$  от  $B_1$  имеет лишь один экстремум (максимум), который при  $\nu = -1$  и принятых остальных исходных данных имеет ординату  $\beta_1'' \approx 151,2$  и абсциссу  $B_1'' \approx 0,198$  (указанные значения найдены путем представления левой части равенства (15) в виде функции  $\beta = \varphi(B_1)$  с последующим решением задачи безусловной минимизации [18, 19] для функции  $(d\varphi(B_1)/dB_1)^2$ ).



Этому максимуму соответствует стационарная точка функционала  $J_1$  в виде точки перегиба с касательной, параллельной оси абсцисс (зависимость функционала  $J_1$  от  $B_1$  с увеличением ординат в  $10^4$  раз представлена на рис. 2 штриховой линией со светлыми кружками, а вертикальная штриховая линия соединяет точку перегиба с точкой максимума зависимости  $\beta_1$  от  $B_1$ ). Каждому значению  $\beta < \beta_1''$ , соответствующему значению абсциссы  $B_1 < 1$ , отвечают две стационарные точки функционала (минимум и максимум). Значению  $\beta = 140$  (см. рис. 2) соответствует график зависимости  $J_1$  от  $B_1$  в виде штриховой линии с темными кружками. Температурное состояние слоя полупрозрачного материала, соответствующее максимуму этой зависимости, является неустойчивым [14] и при малых возмущениях переходит к устойчивому состоянию, отвечающему минимуму указанной зависимости (этот переход на рис. 2 условно показан участками штриховых прямых со стрелками). Из рисунка следует, что по мере приближения снизу значения  $\beta$  к  $\beta_1''$  экстремальные точки зависимости  $J_1$  от  $B_1$  сближаются и в пределе переходят в точку перегиба. Распределение температуры в слое полупрозрачного материала, соответствующее точке перегиба, является предельно возможным, предшествующим явлению теплового взрыва в этом слое [3, 4], которое в данном случае возникает при бесконечно малом возрастании параметра  $\beta$  по отношению к значению  $\beta_1''$ .

В случае  $\nu \geq 0$  уравнения (15) и (16) определены при  $B_1 \geq 0$ , а зависимость  $\beta$  от  $B_1$  может иметь два экстремума (минимум и максимум). При выбранных значениях  $\gamma$ ,  $\mu$  и  $\nu = 0,2$  максимум имеет ординату  $\beta_1^* \approx 171$  и абсциссу  $B_1^* \approx 0,268$ , а минимум — ординату  $\beta_1^* \approx 60,9$  и абсциссу  $B_1^* \approx 46,6$ , значения которых найдены путем решения упомянутой ранее задачи безусловной минимизации (значениям  $\beta_1'$  и  $\beta_1^*$  на рис. 2 соответствуют горизонтальные штриховые линии). С возрастанием параметра  $\nu$  происходит сближение экстремальных точек и при  $\nu \approx 1,9$  они объединяются в точку перегиба с касательной, параллельной оси абсцисс, а при  $\nu > 1,9$  зависимость  $\beta$  от  $B_1$  является строго возрастающей. При  $\nu = 0,2$  значению  $\beta = \beta_1'$  соответствуют две стационарные точки функционала  $J_1$  — точка перегиба с абсциссой  $B_1''$  (ординаты штрихпунктирной кривой с темными треугольниками увеличены в 100 раз по сравнению со значениями  $J_1$ ) и минимум с абсциссой примерно 0,0334 (ординаты той же кривой увеличены в  $10^5$  раз). Температурное состояние слоя полупрозрачного материала, отвечающее точке перегиба, следует считать неустойчивым, поскольку при малом уменьшении параметра  $\beta$  по отношению к значению  $\beta_1''$  происходит переход к устойчивому состоянию, соответствующему минимуму зависимости  $J_1$  от  $B_1$  (этот переход на рис. 2 также условно отмечен участками штриховых прямых со стрелками).

Значению  $\beta = \beta_1^*$  также отвечают две стационарные точки функционала:  $J_1$  — точка перегиба с абсциссой  $B_1^*$  (ординаты штрихпунктирной кривой со светлыми кружками на рис. 2 увеличены в  $5 \cdot 10^4$  раз по сравнению со значениями  $J_1$ ) и



минимум с абсциссой примерно 43,7 (ординаты штрихпунктирных кривых со светлыми и темными кружками и со светлыми квадратами при  $B_1 > 2$  уменьшены в 10 раз). При малом увеличении параметра  $\beta$  происходит переход от неустойчивого температурного состояния в рассматриваемом слое, отвечающем стационарной точке функционала в виде точки перегиба, к устойчивому, соответствующему минимуму  $J_1$  (этот переход снова условно показан участками штриховых прямых со стрелками). При этом значение  $B_1$  возрастает более чем на два порядка, что соответствует, согласно формуле (13), увеличению безразмерной температуры идеально теплоизолированной поверхности слоя почти в 19 раз, равносильное его тепловому разрушению, если значение  $B_1^*$  сопоставить со значением температуры, близкой к 300 К. Если  $\beta > \beta_1^*$ , то функционал  $J_1$  имеет лишь одну стационарную точку, соответствующую его минимуму. Например, при  $\beta = 180$  и  $\nu = 0,2$  (штрихпунктирная кривая со светлыми квадратами) абсцисса минимума равна примерно 46,6, что также отвечает практически нереализуемому температурному состоянию слоя полупрозрачного материала. При  $\beta < \beta_1^*$  единственная стационарная точка, отвечающая минимуму функционала  $J_1$ , имеет существенно меньшую абсциссу. Так, при  $\beta = 40$  и  $\nu = 0$  (сплошная кривая с темными квадратами) абсцисса минимума равна всего  $\sim 0,0205$ .

При  $\beta_1'' < \beta < \beta_1^*$  и  $\nu = 0,2$  функционал  $J_1$  имеет три стационарные точки (максимум и два минимума). На рис. 2 штрихпунктирной кривой с темными кружками приведен график зависимости  $J_1$  от  $B_1$  при  $\beta = 140$  (ординаты левой ветви этой кривой увеличены в  $5 \cdot 10^3$  раз). Температурное состояние в рассматриваемом слое, отвечающее максимуму этой зависимости при  $B_1 \approx 0,6$ , является неустойчивым и при малых возмущениях переходит (показано участками штриховых прямых со стрелками) в состояние, соответствующее минимуму с абсциссой либо  $B_1 \approx 0,117$ , либо  $B_1 \approx 33,2$ . Ясно, что во втором случае также возникает опасность теплового разрушения материала слоя.

Если с целью сравнения вместо квадратичной функции  $\theta_1(\zeta)$  для аппроксимации распределения безразмерного потенциала теплопроводности в слое использовать тригонометрическую функцию  $\theta_2(\zeta) = B_2 \cos(\pi\zeta/2)$ , также являющуюся допустимой для функционала  $J_1$ , то результаты расчетов оказываются достаточно близкими приведенным на рис. 2. Например, при  $\nu = 0,2$  и прежних значениях  $\gamma = 0,11$  и  $\mu = 7$  максимальное значение параметра  $\beta$ , равное  $\beta_2^* \approx 168,3$ , соответствует абсциссе  $B_2^* \approx 0,270$ . Также сравнительно невелико отличие графиков зависимости функционала  $J_1$  от коэффициента  $B_2$ .

**Сравнительная оценка погрешности.** Несмотря на малое отличие результатов при использовании двух рассмотренных формул, аппроксимирующих распределения безразмерной величины потенциала теплопроводности в плоском слое полупрозрачного материала, с прикладной точки зрения целесообразно располагать количественной мерой погрешности, соответствующей каждой формуле. Истинному распределению  $\Psi^*(\zeta)$  этой величины в рассматриваемом

слое соответствует безразмерная плотность  $q^*(\zeta) = -d\Psi^*(\zeta)/d\zeta$  теплового потока, удовлетворяющая условию

$$\frac{dq^*(\zeta)}{d\zeta} = \beta \exp\left(\gamma(1-\zeta)\exp\left(-\frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi^*(\zeta))}\right) - \frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi^*(\zeta))}\right),$$

следующему при  $n = 0$  из уравнения (8) с учетом формулы (14). Приближенное распределение  $\Psi(\zeta)$  в общем случае не удовлетворяет уравнению (8), которое следует из закона сохранения энергии. Этот закон не будет нарушен, если безразмерную плотность  $q(\zeta)$  теплового потока, соответствующую функции  $\Psi(\zeta)$ , определить соотношением

$$q(\zeta) = \beta \int_0^\zeta \exp\left(\gamma(1-\zeta')\exp\left(-\frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi(\zeta'))}\right) - \frac{\mu\nu}{\nu + \ln(1 + \nu\Psi(\zeta'))}\right) d\zeta', \quad (17)$$

получаемым из предыдущего равенства после замены в нем  $\Psi^*(\zeta)$  на  $\Psi(\zeta)$  и учитывая, что  $q(0) = 0$  на идеально теплоизолированной поверхности плоского слоя при  $\zeta = 0$ . Но при этом в общем случае не будет выполнено равенство  $q(\zeta) + d\Psi(\zeta)/d\zeta = 0$ , следующее из закона теплопроводности Фурье [20]. Поэтому величину

$$\Delta = \int_0^1 \left( q(\zeta) + \frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \quad (18)$$

можно рассматривать как интегральную меру погрешности, вызванной приближенным представлением распределения безразмерного потенциала теплопроводности в плоском слое функцией  $\Psi(\zeta)$ , и использовать эту меру при сравнительной оценке близости функций  $\Psi_1(\zeta)$  и  $\Psi_2(\zeta)$  к функции  $\Psi^*(\zeta)$ .

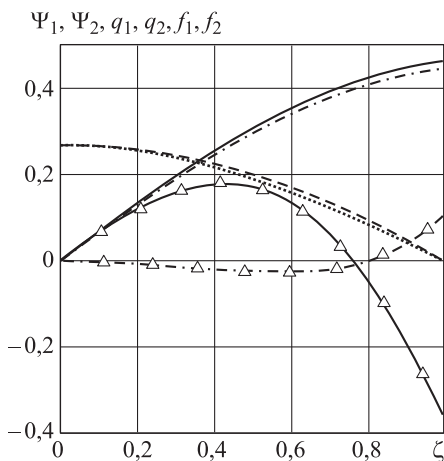


Рис. 3. Зависимости функций  $\Psi$ ,  $q$  и  $f$  от  $\zeta$

Проведем сравнение зависимостей  $q(\zeta)$ ,  $f(\zeta) = q(\zeta) + d\Psi(\zeta)/d\zeta$  и значений  $\Delta$ , соответствующих двум выбранным ранее в качестве допустимых для функционала (12) аппроксимирующих функций  $\Psi_1(\zeta)$  и  $\Psi_2(\zeta)$  при полученных значениях соответственно  $B_1^* \approx 0,268$  и  $B_2^* \approx 0,27$ . На рис. 3 штриховой кривой приведен график зависимости от  $\zeta$  функции  $\Psi_1(\zeta) = B_1^*(1 - \zeta^2)$ , а пунктирной кривой — функции  $\Psi_2(\zeta) = B_2^* \cos(\pi\zeta/2)$ . Сплошной и штрихпунктирной кривыми на этом рисунке приведены графики

зависимостей  $q_1(\zeta)$  и  $q_2(\zeta)$  от  $\zeta$ , полученных подстановкой в формулу (17) квадратичной и тригонометрической аппроксимирующих функций при указанных значениях  $B_1^*$  и  $B_2^*$  (значения  $q_1$  и  $q_2$  увеличены в 5 раз). В первом случае в правой части этой формулы использовано значение  $\beta_1^* \approx 170$ , а во втором —  $\beta_2^* \approx 168,3$ . Поскольку  $q_1(1) > q_2(1)$ , аппроксимация функцией  $\Psi_1(\zeta)$  действительного распределения безразмерного потенциала теплопроводности в плоском слое полупрозрачного материала приводит к несколько большему значению  $\beta_1^*$  по сравнению с  $\beta_2^*$ , полученному при использовании функции  $\Psi_2(\zeta)$ .

Сплошной и штрихпунктирной кривыми с треугольниками на рис. 3 приведены графики функций  $f_1(\zeta) = q_1(\zeta) + d\Psi_1(\zeta)/d\zeta$  и  $f_2(\zeta) = q_2(\zeta) + d\Psi_2(\zeta)/d\zeta$ . Видно, что если действительное распределение  $\Psi^*(\zeta)$  в плоском слое аппроксимировать функцией  $\Psi_1(\zeta)$ , то при одинаковых значениях  $\zeta$  ординаты функции  $f_1(\zeta)$  по абсолютному значению существенно превосходят ординаты функции  $f_2(\zeta)$ . Ясно, что в данном случае целесообразно отдать предпочтение аппроксимирующей функции  $\Psi_2(\zeta)$  и из двух приведенных значений  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$  считать второе более близким к истинному значению  $\beta^*$ . Результаты вычисления по формуле (18) дают значения  $\Delta_1 \approx 8,68 \cdot 10^{-4}$  и  $\Delta_2 \approx 3,046 \cdot 10^{-5}$ , что также подтверждает сделанный вывод.

**Заключение.** Выявлено, что стационарные точки функционала, входящего в вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности в плоском слое полупрозрачного материала, соответствуют не только экстремальным значениям (минимуму и/или максимуму), но и объединению экстремумов, образующему точку перегиба на графике зависимости функционала от коэффициента функции, аппроксимирующей распределение температуры в этом слое. При фиксированных значениях определяющих параметров установившимся температурным состояниям отвечают лишь точки минимума (одна или две). Показано, что вариационная формулировка данной задачи позволяет оценивать сочетания определяющих параметров, соответствующих существованию в слое полупрозрачного материала установившегося распределения температуры. Одновременно анализ стационарных точек функционала дает возможность установить сочетания определяющих параметров, при которых в этом слое возникают предельные температурные состояния, предшествующие тепловому взрыву или резкому повышению уровня температуры материала слоя, вызывающему тепловое разрушение и потерю работоспособности соответствующего элемента конструкции.

*Авторы благодарят профессора В.А. Товстоного за внимание к работе и конструктивные замечания, которые были учтены при доработке статьи.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Елисеев В.Н., Товстоног В.А.* Теплообмен и тепловые испытания материалов и конструкций аэрокосмической техники при радиационном нагреве. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 396 с.
2. *Зарубин В.С.* О работоспособности оболочки с объемным поглощением проникающего излучения // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1974. № 205. С. 105–109.
3. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.
4. *Орленко Л.П., ред.* Физика взрыва. В 2 т. Т. 1. М.: Физматлит, 2002. 832 с.
5. *Зигель Р., Хаузл Дж.* Теплообмен излучением / пер. с англ. М.: Мир, 1975. 936 с.
6. *Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б.* Методы теории теплообмена. Ч. 2. Тепловое излучение. М.: Высшая школа, 1974. 272 с.
7. *Прохоров А.М., ред.* Физический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1983. 928 с.
8. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математическое моделирование термомеханических процессов при интенсивном тепловом воздействии // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 2. С. 300–309.
9. *Зарубин В.С., Станкевич И.В.* Расчет теплонапряженных конструкций. М.: Машиностроение, 2005. 352 с.
10. *Зарубин В.С.* Моделирование. М.: ИЦ Академия, 2013. 336 с.
11. *Елисеев В.Н., Товстоног В.А., Павлова Я.М.* Анализ температурного состояния оболочки мощного газоразрядного источника излучения для тепловых испытаний конструкций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2015. № 4. С. 49–62.  
DOI: 10.18698/0236-3941-2015-4-49-62
12. *Каск Н.Е., Радченко В.В., Федоров Г.М., Чопорняк Д.Б.* Зависимость коэффициента поглощения оптических стекол от температуры при воздействии лазерного излучения // Квантовая электроника. 1979. Т. 6. № 2. С. 337–344.
13. *Зарубин В.С., Селиванов В.В.* Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
14. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
15. *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с.
16. *Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
17. *Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н.* Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 528 с.
18. *Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.* Введение в методы оптимизации. М.: ИНФРА-М, 2008. 272 с.
19. *Аттетков А.В., Зарубин В.С., Канатников А.Н.* Методы оптимизации. М.: ИНФРА-М, 2012. 270 с.
20. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Кувыркин Георгий Николаевич** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Савельева Инга Юрьевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Температурное состояние слоя полупрозрачного материала с зависящими от температуры теплопроводностью и поглощением проникающего излучения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 6. С. 99–113. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-99-113

**TEMPERATURE STATE OF THE LAYER OF TRANSLUCENT MATERIAL WITH DEPENDING ON TEMPERATURE THERMAL CONDUCTIVITY AND ABSORPTION OF PENETRATING RADIATION**

V.S. Zarubin

fn2@bmstu.ru

G.N. Kuvyrkin

fn2@bmstu.ru

I.Yu. Savel'eva

fn2@bmstu.ru

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The paper shows differential form of a mathematical model, describing steady-state process of thermal energy transfer in flat or circular/cylindrical layers under penetrating radiation. Thermal conductivity of semitransparent material for these layers depends on temperature, while the material has a property to absorb penetrating radiation with intensity, which nonlinearly increases with the temperature local value. Using the variational formulation of the nonlinear problem of stationary thermal conductivity, we transform the model's differential form to the variational form. The latter includes the functional, whose stationary point's analysis makes it possible to set conditions, defining implementability of the stationary temperature state of the layer under study

**Keywords**

*Penetrating radiation, volumetric energy deposition, variation form of mathematical model, stationary point of the functional*

Received 30.01.2017

© BMSTU, 2017

---

**REFERENCES**

- [1] Eliseev V.N., Tovstonog V.A. Teploobmen i teplovye ispytaniya materialov i konstruktsiy aerokosmicheskoy tekhniki pri radiatsionnom nagreve [Heat transfer and heat testing of materials and aerospace structures with radiant heating]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2014. 396 p.

- [2] Zarubin V.S. On working ability of a shell with spatial absorption of penetrating radiation. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana*, 1974, no. 205, pp. 105–109.
- [3] Frank-Kamenetskiy D.A. Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoy kinetike [Diffusion and heat transfer in chemical kinetics]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 502 p.
- [4] Orlenko L.P., red. Fizika vzryva. V 2 t. T. 1 [Explosion physics. In 2 vols. Vol. 1]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 832 p.
- [5] Siegel R., Howell J.R. Thermal radiation heat transfer. McGraw Hill, 1972. 814 p.
- [6] Muchnik G.F., Rubashov I.B. Metody teorii teploobmena. Ch. 2. Teplovoe izluchenie [Methods of heat exchange theory. P. 2. Heat radiation]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1974. 272 p.
- [7] Prokhorov A.M., red. Fizicheskiy entsiklopedicheskiy slovar' [Encyclopaedical dictionary on physics]. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1983. 928 p.
- [8] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mathematical modeling of thermomechanical processes under intense thermal effect. *High Temperature*, 2003, vol. 41, no. 2, pp. 257–265.  
DOI: 10.1023/A:1023390021091  
Available at: <https://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1023390021091>
- [9] Zarubin V.S., Stankevich I.V. Raschet teplotnoprzyazhennykh konstruksiy [Calculation of heat-stressed constructions]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2005. 352 p.
- [10] Zarubin V.S. Modelirovanie [The modelling]. Moscow, Akademiya Publ. Center, 2013. 336 p.
- [11] Eliseev V.N., Tovstonog V.A., Pavlova Ya.M. Thermal regime analysis of the shell of the powerful gas-discharge emitting source for structure thermal testing. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2015, no. 4, pp. 49–62 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2015-4-49-62
- [12] Kask N.E., Radchenko V.V., Fedorov G.M., Chopornyak D.B. Temperature dependence of the absorption coefficient of optical glasses exposed to laser radiation. *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1979, vol. 9, no. 2, pp. 193–198. DOI: 10.1070/QE1979v009n02ABEH008731  
Available at: <http://iopscience.iop.org/article/10.1070/QE1979v009n02ABEH008731>
- [13] Zarubin V.S., Selivanov V.V. Variatsionnye i chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy [Variational and numerical methods of solid mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1993. 360 p.
- [14] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving heat conduction problems]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 328 p.
- [15] Vlasova E.A., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Priblizhennyye metody matematicheskoy fiziki [Approximate methods of mathematical physics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2001. 700 p.
- [16] Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Variational calculus and optimum control]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 488 p.
- [17] Zarubin V.S., Ivanova E.E., Kuvyrkin G.N. Integral'noe ischislenie funktsiy odnogo peremennogo [Integral calculus of one-variable function]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2006. 528 c.
- [18] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. Vvedenie v metody optimizatsii [Introduction to optimisation methods]. Moscow, INFRA-M Publ., 2008. 272 p.
- [19] Attetkov A.V., Zarubin V.S., Kanatnikov A.N. Metody optimizatsii [Optimisation methods]. Moscow, INFRA-M Publ., 2012. 270 p.



[20] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in heat conduction theory of solid bodies]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 550 p.

**Zarubin V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Kuvyrkin G.N.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Savel'eva I.Yu.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Temperature State of the Layer of Translucent Material with Depending on Temperature Thermal Conductivity and Absorption of Penetrating Radiation. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 6, pp. 99–113.

DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-99-113



Е.А. Власова, В.С. Зарубина,  
Г.Н. Кувыркин

**Математические модели  
процессов  
теплопроводности**

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие авторов  
**Е.А. Власовой, В.С. Зарубина, Г.Н. Кувыркина**  
**«Математические модели процессов  
теплопроводности»**

Изложены сведения, составляющие содержание раздела  
«Математические модели тепловых систем» курса «Ма-  
тематические модели технических систем». Приведены  
примеры решения задач, а также контрольные вопросы  
и задачи для самостоятельной работы студентов. Часть  
задач может служить основой для проведения студента-  
ми самостоятельной научно-исследовательской работы.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
+7 (499) 263-60-45  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru