

**ВАРИАНТ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА****Б.М. Пахомов**

pahomovb@bmstu.ru

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация****Аннотация**

Предложена модель изотропного разномодульного материала, в которой определяющие соотношения строятся по аналогии с разномодульной теорией упругости С.А. Амбарцумяна. Подход основан на выделении из обобщенной среды жесткости, которая определяет наличие связей между разными направлениями деформирования, что позволяет преодолеть неопределенность при выборе коэффициентов в уравнениях, связывающих напряжения и деформации в случае сложного напряженно-деформированного состояния. В качестве критериев приняты знаки продольных деформаций. Из предложенных соотношений вытекают некоторые ограничения на технические характеристики изотропных разномодульных материалов — модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации для растяжения и сжатия. Приведены результаты обработки с помощью предложенной модели экспериментальных данных на графитах, полученных для некоторых видов напряженно-деформированного состояния при пропорциональном нагружении

**Ключевые слова**

*Разномодульность, схема разделения обобщенной жесткости, определяющие соотношения, модель деформирования*

Поступила в редакцию 06.02.2017  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

В настоящее время общепринятыми являются представления о природе разносопротивляемости материалов, основанные, например, на таких особенностях структуры, как наличие пор у материалов, модуль упругости которых при сжатии больше модуля упругости при растяжении. В большинстве случаев в качестве критерия при определении растягивается или сжимается материал используют знаки первого и в некоторых моделях третьего инварианта тензора напряжений.

Некоторые модели деформирования анизотропных разносопротивляющихся материалов приведены в работе [1, 2] для описания деформирования разномодульных высоконаполненных полимеров использованы тензорно-нелинейные соотношения. Подробный обзор литературы по этому вопросу можно найти в [3].

В качестве исходного тезиса, из которого вытекают все дальнейшие рассуждения, примем, что истинными параметрами, характеризующими состояние среды, могут быть только деформации, а не напряжения. Действительно, схлопывание или раскрытие поры в данном направлении (что, видимо, и является причи-

ной увеличения или уменьшения жесткости) определяется знаком деформации, а никак не напряжения. Это положено в основу новой схемы разделения обобщенной жесткости среды, приведенной в работах [4, 5], посвященных описанию нелинейного поведения обычных, начально изотропных, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов. В настоящей работе представлена модель, описывающая поведение материалов, у которых диаграммы деформирования при пропорциональном нагружении хорошо аппроксимируются прямыми линиями, исходящими из нулевой точки.

При формулировке закона, связывающего напряжения и деформации, будем исходить из того, что начально изотропный разномодульный материал после приложения нагрузки мгновенно превращается в ортотропный. При этом его главные направления деформирования будут совпадать с направлениями главных напряжений и деформаций. Поэтому вполне разумно рассматривать, что происходит с материалом в системе координат, совпадающей с этими направлениями, при этом максимально упрощается процедура выбора коэффициентов податливости и упругости в соотношениях, связывающих компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Этот тезис был положен в основу разномодульной теории упругости [6, 7] (в дальнейшем разномодульной теории), разработанной специалистами армянской школы механиков под руководством С.А. Амбарцумяна. Согласно этой теории, компоненты тензора деформаций в главных направлениях выражаются через компоненты тензора напряжений и то, что происходит с материалом — растяжение или сжатие, определяется по знакам главных напряжений. Предлагаемая в настоящей работе модель во всем идентична разномодульной теории, кроме одного, но самого важного момента — соотношения в главных направлениях строятся в зависимости от знаков главных деформаций, а не главных напряжений. Определяющие соотношения для НДС общего вида, т. е. уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений и деформаций в произвольной системе координат, получаются из соотношений, записанных в главных направлениях с помощью известных математических формул.

Исходя из сказанного, сначала уравнения, связывающие главные напряжения  $\sigma_k$  и главные деформации  $\varepsilon_k$ , запишем в виде

$$\sigma_k = \bar{G}_k \varepsilon_k + L\varepsilon. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  — первый инвариант тензора деформаций ( $k = 1, 2, 3$ ; суммирование по повторяющимся индексам  $k$  здесь и дальше не проводится).

Примем, что коэффициенты  $\bar{G}_k$  и  $L$  определяются по следующим правилам:

$$\bar{G}_k = \begin{cases} \bar{G}^+ & \text{при } \varepsilon_k \geq 0; \\ \bar{G}^- & \text{при } \varepsilon_k < 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$L = \begin{cases} L^+ & \text{при } \varepsilon \geq 0; \\ L^- & \text{при } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Правила (2) и (3) точно соответствуют физической природе разносопротивляемости, например раскрытию или схлопыванию пор. Из уравнения (1) следует, что связи между направлениями деформирования не работают, когда объемная деформация равна нулю, т. е.  $\varepsilon = 0$ . При этом материал, согласно правилу (2), в каждом направлении имеет собственную жесткость, значение которой определяется только знаком соответствующей продольной деформации. Отсюда следует физический смысл употребляемого в настоящей работе определения «собственный», т. е. принадлежащий только данному направлению. Параметры  $\bar{G}^+$  и  $\bar{G}^-$  будем называть собственными модулями направления или просто собственными модулями растяжения и сжатия материала, а  $L^+$  и  $L^-$  — модулями связи при растяжении и сжатии.

Употребляемые здесь понятия с определением «собственный», очевидно, имеют другое смысловое содержание по сравнению с понятиями собственных модулей, собственных напряженных состояний, которые используются при исследовании свойств тензоров напряжений, коэффициентов упругостей и податливостей в работах [8–10 и др.].

Проведя несложные преобразования, получаем выражения для главных деформаций, обратные уравнениям (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\Delta} [(\bar{G}_2\bar{G}_3 + \bar{G}_2L + \bar{G}_3L)\sigma_1 - \bar{G}_3L\sigma_2 - \bar{G}_2L\sigma_3]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\Delta} [-\bar{G}_3L\sigma_1 + (\bar{G}_3\bar{G}_1 + \bar{G}_3L + \bar{G}_1L)\sigma_2 - \bar{G}_1L\sigma_3]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\Delta} [-\bar{G}_2L\sigma_1 - \bar{G}_1L\sigma_2 + (\bar{G}_1\bar{G}_2 + \bar{G}_1L + \bar{G}_2L)\sigma_3], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Delta = \bar{G}_1\bar{G}_2\bar{G}_3 + (\bar{G}_1\bar{G}_2 + \bar{G}_2\bar{G}_3 + \bar{G}_3\bar{G}_1)L$ . Параметры  $\bar{G}_k$  также выбираются по правилу (2).

Легко проверить, что в случае, когда параметры  $\bar{G}^+$  и  $\bar{G}^-$ , а также  $L^+$  и  $L^-$  равны между собой, соотношения (1) и (4) переходят в уравнения для изотропного материала, одинаково реагирующего на растягивающие и сжимающие нагрузки (т. е. закон Гука для изотропного материала). При этом параметры  $\bar{G}^+$ ,  $\bar{G}^-$ ,  $L^+$  и  $L^-$  будут связаны с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  известными зависимостями:

$$\bar{G}^+ = \bar{G}^- = \frac{E}{1+\nu}; \quad L^+ = L^- = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Более или менее достоверные экспериментальные данные обычно имеются для одноосных растяжения и сжатия. Поэтому вполне логично неизвестные параметры модели  $\bar{G}^+$ ,  $\bar{G}^-$ ,  $L^+$  и  $L^-$  для разномодульного материала определять

для этих видов НДС. Материалы с положительными значениями коэффициентов поперечной деформации при простом растяжении в первом направлении ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) растягиваются ( $\varepsilon_1 > 0$ ), а во втором и третьем направлениях — сжимаются ( $\varepsilon_2, \varepsilon_3 < 0$ ) (в настоящей работе материалы с отрицательными значениями коэффициентов поперечных деформаций не рассматриваются). Поэтому в соответствии с правилом (2)  $\bar{G}_1 = \bar{G}^+, \bar{G}_2 = \bar{G}_3 = \bar{G}^-$ . Аналогично при одноосном сжатии  $\bar{G}_1 = \bar{G}^-, \bar{G}_2 = \bar{G}_3 = \bar{G}^+$ .

Сравнивая выражения (4) для этих случаев с очевидными выражениями для одноосных растяжения

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_t}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu_t \varepsilon_1 \quad (5)$$

и сжатия

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu_c \varepsilon_1, \quad (6)$$

получаем выражения, связывающие между собой технические характеристики материала и параметры модели:

$$E_t = \frac{\bar{G}^+ \bar{G}^- + (2\bar{G}^+ + \bar{G}^-) L^+}{\bar{G}^- + 2L^+}; \quad (7)$$

$$\nu_t = \frac{L^+}{\bar{G}^- + 2L^+};$$

$$E_c = \frac{\bar{G}^+ \bar{G}^- + (2\bar{G}^- + \bar{G}^+) L^-}{\bar{G}^+ + 2L^-}; \quad (8)$$

$$\nu_c = \frac{L^-}{\bar{G}^+ + 2L^-}.$$

Здесь  $E_t, \nu_t$  и  $E_c, \nu_c$  — модули упругости и коэффициенты поперечных деформаций при растяжении и сжатии. Выразив величины  $\bar{G}^+$  и  $\bar{G}^-$  из вторых уравнений (7) и (8) и подставив их в первые уравнения (7) и (8), получим достаточно простую систему линейных уравнений относительно неизвестных  $L^+$  и  $L^-$ , из которой следует, что

$$\bar{G}^+ = \frac{E_t - \nu_t E_c}{1 - \nu_t \nu_c};$$

$$\bar{G}^- = \frac{E_c - \nu_c E_t}{1 - \nu_t \nu_c}; \quad (9)$$

$$L^+ = \frac{\nu_t (E_c - \nu_c E_t)}{(1 - \nu_t \nu_c)(1 - 2\nu_t)};$$

$$L^- = \frac{\nu_c (E_t - \nu_t E_c)}{(1 - \nu_t \nu_c)(1 - 2\nu_c)}.$$

Таким образом, сформулирован закон упругости для начально изотропного разномодульного материала в главных направлениях, причем простота соотношений позволяет легко находить неизвестные параметры модели через технические характеристики и без особой сложности использовать их в практических расчетах.

Согласно предложенному подходу, при решении задач об определении НДС все тело представляется как совокупность областей, в каждой из которых главные и объемная деформации не меняют свой знак. При этом получается, что тело после приложения нагрузки как бы состоит из фрагментов, изготовленных из разных материалов с разными механическими характеристиками. Аналогично и в разномодульной теории тело также разбивается на отдельные области, только внутри этих областей выполняется условие постоянства знаков для каждого из главных напряжений.

Принципиальное отличие предлагаемой модели от разномодульной теории заключается в том, что матрицы упругости или податливости в соотношениях (1) и (4) во всех случаях остаются симметричными, в то время как в разномодульной теории условие симметричности не выполняется и приходится накладывать ограничения на технические характеристики  $E_t \nu_c = E_c \nu_t$ .

В таблице приведены значения модулей упругости, коэффициентов Пуассона, полученные для зернистого композита на основе ненасыщенных полиэфиров [11, 12], а также для графитов ВПП и АРВ [13, 14]. Значения модулей при растяжении и сжатии этих материалов отличаются значительно, коэффициенты Пуассона также сильно разнятся. В таблице приведены значения параметров  $\bar{G}^+$ ,  $\bar{G}^-$ ,  $L^+$ ,  $L^-$  для этих материалов, рассчитанные по формулам (9).

**Расчетные значения параметров материалов**

Параметры	Материал		
	Зернистый композит [11, 12]	Графит [13, 14]	
		ВПП	АРВ
$E_t$ , ГПа	14	6,6	5,22
$E_c$ , ГПа	18,9	8,55	7,99
$\nu_t$	0,276	0,212	0,2
$\nu_c$	0,398	0,28	0,35
$\bar{G}^+$ , ГПа	9,87	5,09	3,895
$\bar{G}^-$ , ГПа	14,975	7,125	6,627
$L^+$ , ГПа	9,226	2,622	2,209
$L^-$ , ГПа	19,256	3,239	4,544
$K^+$ , ГПа	12,516	4,32	3,51
$K^-$ , ГПа	24,25	5,61	6,75
$E^+$ , ГПа	13,08	6,38	4,93
$E^-$ , ГПа	22,98	8,82	8,543
$\nu^+$	0,326	0,254	0,266
$\nu^-$	0,36	0,238	0,289

Приведенные данные однозначно указывают на необходимость учитывать в определяющих соотношениях различие свойств при растягивающих и сжимающих нагрузках. При этом диаграммы деформирования довольно хорошо аппроксимируются двумя лучами, т. е. такие материалы можно отнести к категории разномодульных.

Из разномодульной теории следует, что при одновременном растяжении по трем главным направлениям материал ведет себя как обычный неравномодульный материал с модулем упругости  $E_t$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_t$ , а при одновременном сжатии по тем же направлениям — модуль упругости и коэффициент Пуассона принимают значения  $E_c$  и  $\nu_c$ . Используя предлагаемый подход, также получим систему уравнений, соответствующую закону Гука для двух видов линейно упругой изотропной среды, одинаково сопротивляющейся растяжению и сжатию, отдельно для областей, в которых одинаковые положительный и отрицательный знаки имеют главные деформации. Из (1) или (4) получаем, что в классической форме записи закона Гука модули упругости  $E^+$ ,  $E^-$  и коэффициенты Пуассона  $\nu^+$ ,  $\nu^-$  таких двух гипотетических материалов выражаются через технические характеристики разномодульного материала с помощью формул:

$$\begin{aligned} E^+ &= \frac{[(1-2\nu_t-3\nu_t\nu_c)E_t+2\nu_t(1+\nu_t)E_c](E_t-\nu_tE_c)}{(1-\nu_t\nu_c)[(1-2\nu_t-2\nu_t\nu_c)E_t+\nu_t(1+2\nu_t)E_c]}; \\ \nu^+ &= \frac{\nu_t(E_c-\nu_cE_t)}{(1-2\nu_t-2\nu_t\nu_c)E_t+\nu_t(1+2\nu_t)E_c}; \\ E^- &= \frac{[(1-2\nu_c-3\nu_t\nu_c)E_c+2\nu_c(1+\nu_c)E_t](E_c-\nu_cE_t)}{(1-\nu_t\nu_c)[(1-2\nu_c-2\nu_t\nu_c)E_c+\nu_c(1+2\nu_c)E_t]}; \\ \nu^- &= \frac{\nu_c(E_t-\nu_tE_c)}{(1-2\nu_c-2\nu_t\nu_c)E_c+\nu_c(1+2\nu_c)E_t}; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь знак «+» соответствует всестороннему растяжению, знак «-» — всестороннему сжатию.

Понятно, что материалов с такими значениями модулей упругости  $E^+$  и  $E^-$  и коэффициентов поперечных деформаций  $\nu^+$  и  $\nu^-$  в природе не существует. Эти параметры являются лишь расчетными коэффициентами при формальном переходе от уравнений (1) к закону Гука в его классической форме.

Значения модулей объемного растяжения  $K^+$  и сжатия  $K^-$  определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} K^+ &= \frac{1}{3}(\bar{G}^+ + 3L^+) = \frac{E^+}{3(1-2\nu^+)}; \\ K^- &= \frac{1}{3}(\bar{G}^- + 3L^-) = \frac{E^-}{3(1-2\nu^-)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В таблице приведены расчетные значения параметров  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $\nu^+$ ,  $\nu^-$ ,  $K^+$ ,  $K^-$ , полученные с помощью формул (10) и (11) для зернистого композита и графитов ВПП и АРВ. Практическое значение здесь могут иметь расчетные данные для модуля объемного сжатия, так как представляется возможной экспериментальная проверка второй формулы в (11). С помощью такой сверки расчетных значений с экспериментальными данными можно будет сделать предварительный вывод о корректности применения данной модели для описания поведения конкретного материала. Очевидно, что о применимости модели в каждом конкретном случае можно будет судить только по результатам обработки данных экспериментов на сложное НДС.

Предположив, что удельная энергия упругой деформации  $\Phi$  есть однородная функция второй степени относительно компонент деформаций, а дополнительная работа  $A$  — однородная функция второй степени относительно напряжений, можно показать, что

$$\Phi = A = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

для материалов, поведение которых описывается уравнением (1). При этом каждая область тела, в которой сохраняется определенное сочетание, рассматривается отдельно.

Вид функционалов  $\Phi$  и  $A$  будет зависеть от сочетания знаков главных деформаций и знака объемной деформации.

Всего возможны шесть различных сочетаний:

- 1)  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon > 0$ ;
- 2)  $\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0$ ;
- 3)  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0$ ;
- 4)  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0$ ;
- 5)  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0$ ;
- 6)  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0$ .

Например, для области, где  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0$ , имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \bar{G}^+ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + L^+ \varepsilon^2 + (\bar{G} - \bar{G}^+) \varepsilon_3^2 \right].$$

Используя соотношения (1) или (4), получаем, что в каждой области удельная энергия деформации  $\Phi$  является потенциалом деформаций

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

а дополнительная работа деформаций  $A$  является потенциалом напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_{ij}}.$$

В каждой области, в которой соблюдается правило постоянства знаков главных деформаций и знака объемной деформации, выражение для удельной потенциальной энергии  $\Phi$  будет представлять собой квадратичную форму, положительно определенную относительно главных деформаций. Применив критерий Сильвестра, а также предположив, что значение модулей  $\bar{G}^+$  и  $\bar{G}^-$  не может быть отрицательным, получаем, что границы изменения коэффициентов поперечных деформаций определяются неравенствами

$$v_t < 0,5, \quad v_c < 0,5, \quad v_t v_c < 1. \quad (12)$$

Для обычного изотропного линейно-упругого материала коэффициент Пуассона, согласно предлагаемой модели, лежит в пределах от  $-1$  до  $0,5$ .

Условия неотрицательности модулей  $\bar{G}^-$  и  $\bar{G}^+$  можно трактовать как следующие ограничения, накладываемые на технические характеристики разномодульного материала:  $E_t - v_t E_c > 0$ ;  $E_c - v_c E_t > 0$ .

Рассмотрим теперь кручение как один из основных видов напряженного состояния. Пусть  $\sigma_1 = \tau_0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau_0$ . Для определенности примем, что  $\bar{G}^- > \bar{G}^+$ . Из уравнений (4) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\Delta} \bar{G}^- (\bar{G}^- + 3L^+) \tau_0; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\Delta} (\bar{G}^- - \bar{G}^+) L^- \tau_0; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{1}{\Delta} (\bar{G}^+ \bar{G}^- + \bar{G}^+ L^+ + 2\bar{G}^- L^+) \tau_0, \end{aligned}$$

где  $\Delta = \bar{G}^- (\bar{G}^+ \bar{G}^- + 2\bar{G}^+ L^+ + \bar{G}^- L^-)$ . Здесь параметры  $\bar{G}^+$ ,  $\bar{G}^-$ ,  $L^+$  и  $L^-$  определяются по формулам (9).

В данном случае равенство  $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_3|$  не выполняется, причем  $\varepsilon_1 > |\varepsilon_3|$ , а также деформация  $\varepsilon_2$  меньше нуля. Кроме того, оказывается, что при кручении в полном соответствии с экспериментом разномодульный материал испытывает изменение объема. При этом объемная деформация

$$\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \bar{G}^- (\bar{G}^- - \bar{G}^+) \tau_0.$$

До настоящего момента связь между напряжениями и деформациями устанавливалась в направлениях, где деформации сдвига и касательные напряжения равны нулю. Однако определяющие соотношения необходимо строить в произвольной системе координат. Это нетрудно сделать, используя известные формулы преобразования тензоров при переходе из одной системы координат в другую. Эта процедура совершенно идентична процедуре, представленной в работе [6]. Достаточно только во всех формулах поменять местами деформации и напряжения. Далее приведены итоговые уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , в произвольной системе координат ( $i, j = x, y, z$ ):



$$\sigma_{xx} = a_{11}\varepsilon_{xx} + a_{12}(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + B_3m_1^2\varepsilon_2 + B_2n_1^2\varepsilon_3;$$

$$\sigma_{yy} = a_{22}\varepsilon_{yy} + a_{12}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) - B_3l_2^2\varepsilon_1 + B_1n_2^2\varepsilon_3;$$

$$\sigma_{zz} = a_{33}\varepsilon_{zz} + a_{12}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - B_2l_3^2\varepsilon_1 - B_1m_3^2\varepsilon_2;$$

$$\sigma_{xy} = A_3\varepsilon_{xy} - B_2l_1l_2\varepsilon_1 - B_1m_1m_2\varepsilon_2;$$

$$\sigma_{yz} = A_1\varepsilon_{yz} + B_3m_2m_3\varepsilon_2 + B_2n_2n_3\varepsilon_3;$$

$$\sigma_{zx} = A_2\varepsilon_{zx} - B_3l_1l_3\varepsilon_1 + B_1n_1n_3\varepsilon_3;$$

$$A_1 = a_{11} - a_{12}; \quad A_2 = a_{22} - a_{12}; \quad A_3 = a_{33} - a_{12};$$

$$B_1 = a_{33} - a_{22}; \quad B_2 = a_{33} - a_{11}; \quad B_3 = a_{22} - a_{11}.$$

Здесь  $l_k, m_k, n_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — направляющие косинусы, определяющие положение произвольной системы координат  $xuz$  относительно системы  $123$ .

Коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}$  определяются по следующим формулам:

$$1) \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0, \varepsilon > 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = \bar{G}^+ + L^+, \quad a_{12} = L^+;$$

$$2) \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0, \quad a_{11} = a_{22} = \bar{G}^+ + L^+, \quad a_{33} = \bar{G}^- + L^+, \quad a_{12} = L^+;$$

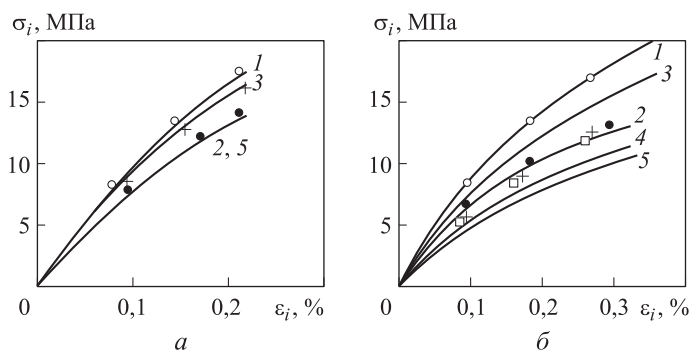
$$3) \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0, \quad a_{11} = a_{22} = \bar{G}^+ + L^-, \quad a_{33} = \bar{G}^- + L^-, \quad a_{12} = L^-;$$

$$4) \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon < 0, \quad a_{11} = \bar{G}^+ + L^+, \quad a_{22} = a_{33} = \bar{G}^+ + L^+, \quad a_{12} = L^+;$$

$$5) \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \varepsilon > 0, \quad a_{11} = \bar{G}^+ + L^-, \quad a_{22} = a_{33} = \bar{G}^- + L^-, \quad a_{12} = L^-;$$

$$6) \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0, \varepsilon_3 < 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = \bar{G}^- + L^-, \quad a_{12} = L^-.$$

На рисунке приведены результаты обработки экспериментальных данных для графитов ВПП и АРВ [13, 14].



Диаграммы деформирования графитов ВПП (а) и АРВ (б) при пропорциональном нагружении

Диаграммы построены в координатах  $\sigma_i - \varepsilon_i$  (интенсивность напряжений–интенсивность деформаций) для следующих вариантов нагружения:  $\circ$  и  $1$  —

$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0 : 0 : -1$ ; • и 2 —  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : 0$ ; 3 —  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : 0 : -1$ ; □ и 4 —  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +0,325 : 0$ ; + и 5 —  $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = +1 : +1 : 0$ ; сплошные линии — эксперимент.

Диаграммы (см. рисунок) существенно нелинейны. Поэтому была разработана простейшая нелинейная модель деформационного типа, основанная на том же принципе разделения обобщенной жесткости на собственную жесткость и жесткость связи. Эта модель применима только для нагружения, близкого к пропорциональному, когда в процессе прикладывания внешней нагрузки постоянными остаются знаки главных деформаций и знак первого инварианта тензора деформаций. В этом случае определяющие соотношения устанавливают связь между конечными значениями компонент тензоров деформаций и напряжений.

В использованном варианте модели принято, что существует единая для всех видов НДС зависимость

$$p_i = f(\bar{\varepsilon}_i), \quad (13)$$

где

$$p_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\bar{G}_1 \varepsilon_1)^2 + (\bar{G}_2 \varepsilon_2)^2 + (\bar{G}_3 \varepsilon_3)^2]};$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)};$$

здесь  $p_i$  — эквивалентное напряжение;  $\bar{\varepsilon}_i$  — интенсивность деформаций в форме, которая является самой простой из всех возможных. И  $p_i$  и  $\bar{\varepsilon}_i$  — инварианты НДС, поскольку определяются через главные деформации.

Из этого предположения следует, что зависимость (13) остается единой и для всех зон независимо от того, какое сочетание знаков главных деформаций и знака объемной деформации реализуется в данной зоне.

Здесь необходимо отметить, что, очевидно, возможно построение и других нелинейных моделей разносопротивляющихся материалов с использованием предлагаемого подхода. Например, можно предположить существование двух разных зависимостей (формула (13)), соответствующих разным знакам объемной деформации. К сожалению, недостаточный объем имеющихся экспериментальных данных, полученных при испытании материалов на сложное НДС, затрудняет реализацию более сложных моделей применительно к конкретным материалам.

В качестве опорных кривых были выбраны кривые, соответствующие чистому сдвигу, т. е. когда  $\sigma_1 = \tau_0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau_0$ . Совпадение расчетных и экспериментальных данных можно считать вполне удовлетворительным.

**Выводы.** Применение предлагаемого подхода к описанию деформирования изотропных разномодульных материалов представляется вполне обоснованным. Во-первых, имеется полная ясность при определении того, что происходит в материале в данном направлении — растяжение или сжатие. Во-вторых, мат-

рица связи между напряжениями и деформациями во всех случаях симметрична в отличие от подходов, в основе которых лежит разномодульная теория упругости, и приходится или накладывать сильное ограничение ( $E_t \nu_c = E_c \nu_t$ ), или выполнять искусственную процедуру приведения матрицы к симметричному виду. Кроме того можно отметить простоту определяющих соотношений, что позволяет легко находить параметры модели для данного материала и без затруднений использовать в практических расчетах. Однако в каждом конкретном случае теоретические результаты настоящей работы необходимо сопоставлять с данными, полученными в экспериментах на разномодульных материалах при сложном напряженном состоянии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Математические модели деформирования углерод-углеродных композитов // Известия РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 111–123.
2. Комков К.Ф. Особенности упругих свойств высоконаполненных полимерных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2008. № 3. С. 3–13.
3. Божанов П.В. Задачи деформирования тонких пластинок из дилатирующих разносопротивляющихся материалов. Дисс. ... канд. техн. наук. Тула: ТулПИ, 2002. 233 с.
4. Пахомов Б.М. Условие пластического течения, включающее коэффициент Пуассона // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 2. С. 15–27.
5. Пахомов Б.М. Применение теории собственных напряжений к описанию нелинейного деформирования металлов и сплавов // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-854 URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/854.html>
6. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
7. Саркисян М.С. О соотношениях теории упругости изотропных тел, материал которых по-разному сопротивляется растяжению и сжатию // Известия АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 87–94.
8. Димитриенко Ю.И. Механика сплошной среды: Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
9. Анин Б.Д., Остросаблин Н.И. Анизотропия упругих свойств материалов // Журнал прикладной механики и технической физики. 2008. Т. 49. № 6. С. 998–1014.
10. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 38–45.
11. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Известия Саратовского ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. № 4-2. С. 9–13.
12. Экспериментальное исследование деформирования и разрушения зернистых композитов на основе полиэфирных смол / Д.Е. Бессонов, А.Ю. Ершова, Ю.П. Зезин, М.И. Мартиросов, Л.Н. Рыбинский // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 1. С. 111–125.
13. Строчков В.И., Барабанов В.Н. Методика исследования прочностных и деформационных свойств графита в условиях сложного напряженного состояния // Заводская лаборатория. 1974. № 9. С. 1141–1144.

14. Березин А.В., Строков В.И., Барабанов В.Н. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов // Конструкционные материалы на основе углерода. Вып. И. М.: Металлургия, 1976. С. 102–110.

**Пахомов Борис Максимович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Пахомов Б.М. Вариант модели изотропного разномодульного материала // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 6. С. 35–48.

DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48

## ALTERNATIVE MODEL OF ISOTROPIC MATERIAL WITH DIFFERENT MODULUS

**В.М. Pakhomov**

[pahomovb@bmstu.ru](mailto:pahomovb@bmstu.ru)

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

### Abstract

The study suggests a model of isotropic heterogeneous material (isotropic material with different modulus of elasticity in different directions). In this model the defining relations are built by analogy with the different-modular theory of elasticity developed by S.A. Ambartsumyan. The approach is based on the generalized stiffness decomposition, which determines the presence of bonds between different directions of deformation. This makes it possible to deal with the uncertainty when choosing the coefficients in the equations relating stresses and deformations in the case of a complex stress-strain state. Signs of longitudinal deformations are taken as criteria. Some limitations on the technical characteristics of isotropic, different-modular materials — elastic modulus and coefficients of transverse strain for tension and compression result from the proposed relationships. The given model helps process experimental data on graphites, and the study gives the results of the processing obtained for some types of stress-strain state under proportional loading

### Keywords

*Different modulus of elasticity under strain and compression, generalized stiffness decomposition, defining relationships, model of deformation*

Received 06.02.2017

© BMSTU, 2017

## REFERENCES

- [1] Golovin N.N., Kuvyrkin G.N. Numerical modeling of carbon/carbon composites with nanotextured matrix and 3D pores of irregular shapes. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 18, pp. 2447–2457. DOI: 10.16/j.ijssolstr.2011.04.021  
Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768311001740>

- [2] Komkov K.F. Peculiarities of elastic properties of highly filled polymer materials. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., *Mechan. Eng.*], 2008, no. 3, pp. 3–13 (in Russ.).
- [3] Bozhanov P.V. Zadachi deformirovaniya tonkikh plastinok iz dilatiruyushchikh raznosoprotivlyayushchikh materialov: diss. kand. tekhn. nauk [Deformation problems of thin films made of multimodulus dilatant materials: kand. tech. sci. diss.]. Tula, TulPI Publ., 2002. 233 p.
- [4] Pakhomov B.M. The plastic flow condition including the Poisson's ratio. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., *Mechan. Eng.*], 2014, no. 2, pp. 15–27 (in Russ.).
- [5] Pakhomov B.M. Application of intrinsic strains theory to definition of metals and alloys non-linear deformation. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 7 (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-7-854  
Available at: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/854.html>
- [6] Ambartsumyan S.A. Raznomodul'naya teoriya uprugosti [Multimodulus elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 320 p.
- [7] Sarkisyan M.S. On elasticity theory relations for isotropic bodies, material of which has different resistance to tensile and compression. *Izvestiya AN SSSR. MTT*, 1987, no. 5, pp. 87–94 (in Russ.).
- [8] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy: T. 1. Tenzornyy analiz [Continuum mechanics. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2011. 463 p.
- [9] Anin B.D., Ostrosablin N.I. Anisotropy of elastic properties of materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 998–1014.  
DOI: 10.1007/s10808-008-0124-1  
Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10808-008-0124-1>
- [10] Markin A.A., Sokolova M.Yu., Khristich D.V. A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 1, art. 30. DOI: 10.3103/S0025654411010055  
Available at: <https://link.springer.com/article/10.3103/S0025654411010055?no-access=true>
- [11] Bessonov D.E., Zezin Yu.P., Lomakin E.V. Multimodulus behavior of the grained composites on the base of unsaturated polyethers. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Ser.: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2009, vol. 9, no. 4-2, pp. 9–13 (in Russ.).
- [12] Bessonov D.E., Ershova A.Yu., Zezin Yu.P., Martirosov M.I., Rybinskiy L.N. Experimental research on deformation and destruction of grain composites based on polyester resins. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 111–125 (in Russ.).
- [13] Stokov V.I., Barabanov V.N. Research method for graphite structural and deformation behavior under combined stress. *Zavodskaya laboratoriya* [Industrial laboratory. Materials diagnostics], 1974, no. 9, pp. 1141–1144 (in Russ.).
- [14] Berezin A.V., Stokov V.I., Barabanov V.N. Deformiruemost' i razrushenie izotropnykh grafitovykh materialov [Deformability and destruction of isotropic graphite materials]. *Konstruktsionnye materialy na osnove ugleroda. Vyp. I* [Carbon construction materials. Iss. I]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1976, pp. 102–110.

**Pakhomov B.M.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor of Space and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Pakhomov B.M. Alternative Model of Isotropic Material with Different Modulus. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 6, pp. 35–48. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие  
автора **Л.Н. Лысенко**

**«Наведение баллистических ракет»**

Изложены научные и методологические основы наведения баллистических ракет. Рассмотрены вопросы программирования движения (задачи наведения) и информационно-навигационного обеспечения управления (задачи навигации), а также проблемы определения точности стрельбы (задачи оценки точности возмущенного движения). Показаны направления решений соответствующих задач при создании ракетных комплексов тактического, оперативно-тактического и стратегического назначения, возможные пути совершенствования баллистико-навигационного обеспечения полета ракет указанных классов.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
+7 (499) 263-60-45  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru