

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМЫХ УЧАСТКОВ ВОЛНОВОДОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СВЯЗИ

И.В. Кудрявцев¹

П.Н. Сильченко¹

М.М. Михнёв²

О.Б. Гоцелюк²

IKudryavcev@sfu-kras.ru

PSilchenko@sfu-kras.ru

mix@iss-reshetnev.ru

gotselukoll@ngs.ru

¹ Сибирский федеральный университет, г. Красноярск,
Российская Федерация

² АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва»,
г. Железногорск, Красноярский край, Российская Федерация

Аннотация

Создание протяженных тонкостенных конструкций волноводов с минимальными массогабаритными параметрами и наилучшими функционально-эксплуатационными характеристиками возможно только при использовании соответствующих уточненных методов расчета на основе решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих статическое, динамическое и термоупругое состояния волноводов. Приведено аналитическое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций прямых участков волноводов прямоугольного поперечного сечения при изгибе. Проведена сравнительная оценка значений максимальных напряжений при изгибе прямых участков тонкостенных волноводов различных типоразмеров, полученных по предлагаемой методике и в результате расчета по формуле Навье и численным методом конечных элементов в ANSYS. Выявлены особенности напряженного состояния волноводов при изгибе, а также уточнены области применения различных типов конечных элементов

Ключевые слова

Космический аппарат, волновод, прямой участок, неосесимметричное поперечное сечение, тонкостенные элементы, пластинка, напряженно-деформированное состояние, методика расчета, аналитическое решение, формула Навье, метод конечных элементов

Поступила в редакцию 19.06.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-2875.2015.8 и гранта РФФИ № 16-38-00325

Введение. При выполнении проектно-конструкторских работ по созданию антенно-фидерных и протяженных волноводно-распределительных систем с тонкостенным неосесимметричным поперечным сечением для новых перспективных космических аппаратов необходимы соответствующие методы расчета [1, 2].

Согласно теории стержней [3–5], применение упрощенных моделей, имеющих эквивалентные геометрические и инерциальные характеристики, нагрузки

и способы закрепления, при оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) отдельных волноводов и волноводно-распределительных систем в целом не позволяет создавать изделия с минимальными массогабаритными параметрами и наилучшими функционально-эксплуатационными характеристиками.

При разработке таких уточненных методов расчета волновода получена общая глобальная система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих его статическое, динамическое и термоупругое состояния [6]. Трудности математического характера приводят к тому, что к настоящему времени не получено общее аналитическое решение даже для частной системы дифференциальных уравнений одной пластинки, составляющей конструкцию волновода, тем более для общей глобальной системы дифференциальных уравнений модели участка волновода, состоящей из четырех пластинок, образующих прямоугольное поперечное сечение [7, 8].

В работе [9] на основе положений теории пластин и оболочек с использованием полуобратного метода Сен-Венана в перемещениях и напряжениях удалось получить частное аналитическое решение глобальной системы дифференциальных уравнений модели прямого участка волновода и определить уточненное НДС в любой точке его конструкции при наиболее опасных изгибных деформациях.

Аналитическое решение [9] позволило уточнить (по сравнению с формулой Навье) выражение для определения максимальных нормальных напряжений, а также выявить касательные напряжения в локальных областях исследуемого волновода.

Сравнивая выражения, полученные при использовании аналитических выводов [9], с зависимостями, основанными на формуле Навье, выявили, что при определенных соотношениях геометрических размеров тонкостенного прямоугольного поперечного сечения исследуемых волноводов результаты могут значительно отличаться.

Решение [9] и другие существующие аналитические [3–5, 10–12], а также численные методы решений [13 и др.] позволяют получать еще более широкий диапазон результатов при расчете НДС тонкостенных неосесимметричных конструкций волноводов. Для проведения расчетов при проектировании волноводно-распределительных систем необходимо выбирать наиболее достоверные методы расчета для конструкций волноводов в широком диапазоне геометрических размеров тонкостенных неосесимметричных поперечных сечений.

Следовательно, для выбора наиболее достоверного метода расчета конструкций волноводов в широком диапазоне геометрических размеров необходимо выполнить сравнительную оценку решений по основным, наиболее применяемым методам с обоснованным анализом полученных результатов.

Постановка задачи. Сравнительную оценку решений выполним для случая изгиба прямого участка волновода относительно оси z в глобальной системе координат под действием изгибающего момента M_z в плоскости минимальной жесткости (рис. 1).

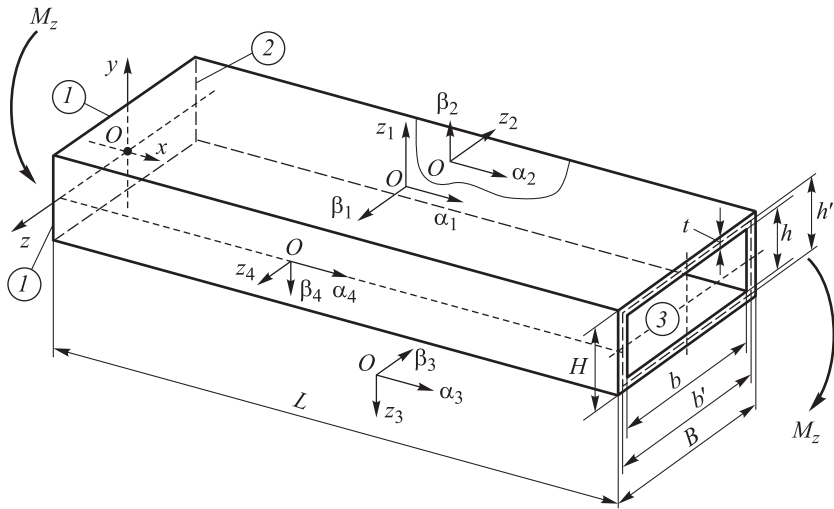


Рис. 1. Схема нагружения прямого участка волновода

В качестве основных исследуемых и сравниваемых параметров примем максимальные значения нормальных и касательных напряжений в тонкостенной конструкции прямого участка волновода.

Аналитические решения задачи. *Решение по теории стержней.* При изгибе прямого участка (см. рис. 1) волновода возникают только нормальные напряжения, которые не зависят от конструктивных особенностей поперечного сечения и, согласно теории стержней [3–5], определяются для каждой составляющей его пластины по формуле Навье:

$$\sigma_{\alpha 1} = \sigma_{\alpha 2} = \sigma_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 4} = \frac{M_z}{J_z} y, \quad -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}. \quad (1)$$

Максимальные значения нормальных напряжений действуют не только на наружных поверхностях пластинок 1 и 3 при $z_{1,3} = \frac{t}{2}$, но и на боковых сторонах пластинок 2 и 4 при $\beta_{2,4} = \pm H/2$ (см. рис. 1, 2, а) и составляют

$$\sigma_{\alpha 1 \max} = \sigma_{\alpha 2 \max} = \sigma_{\alpha 3 \max} = \sigma_{\alpha 4 \max} = \pm \frac{M_z}{J_z} \frac{H}{2}. \quad (2)$$

Касательные напряжения при таком нагружении, согласно данным работ [3–5], принимаются равными нулю.

Решение по теории тонкостенных стержней. Как известно [10–12], при расчете по теории тонкостенных стержней аналитически уточняется влияние касательных напряжений от поперечных сил и крутящих моментов с соответствующей им деформацией поперечного сечения.

В рассматриваемом случае нагружения (см. рис. 1) происходит свободный (нестесненный) изгиб под действием только изгибающего момента в одной плоскости. Центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

В результате решения по теории тонкостенных стержней получено выражение, совпадающее с формулой Навье (1), (2). Распределение нормальных напряжений показано на рис. 2, а.

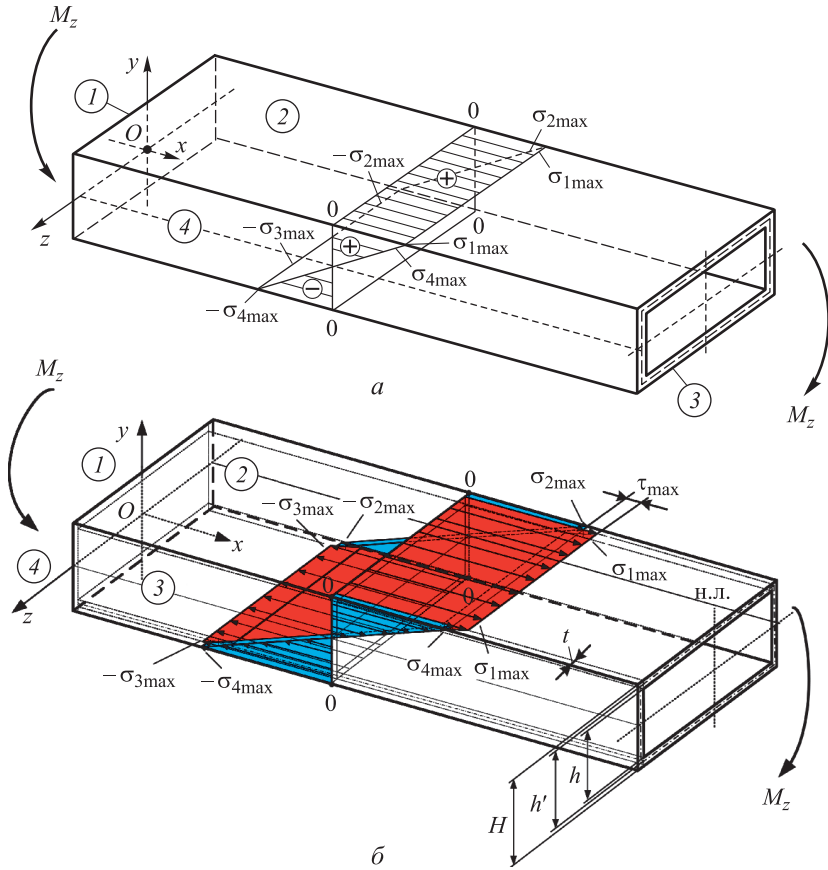


Рис. 2. Напряженное состояние волновода при изгибе; решение для стержневой (а) и оболочечной (б) моделей

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений. В работе [9] на основе положений теории упругости [14–16], теории пластин и оболочек с использованием полуобратного метода Сен-Венана построено аналитическое решение рассматриваемой задачи изгиба составной оболочечной модели конструкции волновода (см. рис. 1), которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \beta_1^2 \frac{M_z h'}{J_z 4}; & w_1 &= \frac{h'}{2} - \frac{M_z}{2EJ_z} \left[\alpha_1^2 + \mu \frac{h'^2}{4} \right]; \\
 \phi_2 &= \frac{M_z \beta_2^3}{J_z 6}; & w_2 &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= -\beta_3^2 \frac{M_z h'}{J_z 4}; & w_3 &= -\frac{h'}{2} + \frac{M_z}{2EJ_z} \left[\alpha_3^2 + \mu \frac{h'^2}{4} \right]; \\ \phi_4 &= -\frac{M_z \beta_4^3}{J_z 6}; & w_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя выражения (1), можно определить напряжения и деформации в любой точке i -х пластинок ($i = 1, 2, 3, 4$), составляющих прямой участок волновода (см. рис. 1) при его изгибе, по зависимостям [14–16]:

$$\sigma_{\alpha i} = \sigma_{\phi i} + \sigma_{\omega i} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \beta_i^2} - \frac{E_{z_i}}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \beta_i^2} \right); \quad (4)$$

$$\sigma_{\beta i} = \sigma_{\phi i} + \sigma_{\omega i} = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \alpha_i^2} - \frac{E_{z_i}}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \beta_i^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \alpha_i^2} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_{z i} = 0.$$

На рис. 2, б показано распределение нормальных напряжений согласно уточненным зависимостям состояния оболочечной модели волновода (3).

Например, максимальные нормальные напряжения при изгибе прямого участка волновода, которые действуют на наружных поверхностях пластинок 1 и 3 ($i = 1, 3$), определяются по формуле

$$\sigma_{1 \max} = -\sigma_{3 \max} = \frac{M_z}{J_z} \left(\frac{h'}{2} + \frac{t}{2} \frac{1}{(1 - \mu^2)} \right). \quad (6)$$

Выражения нормальных напряжений для пластинок 2 и 4 аналогичны известной формуле Навье [1]:

$$\sigma_{\alpha 2} = \frac{M_z}{J_z} \beta_2, \quad \sigma_{\alpha 4} = \frac{M_z}{J_z} \beta_4. \quad (7)$$

Максимальные значения нормальных напряжений действуют на боковых сторонах и равны:

$$\sigma_{\alpha 2 \max} = \sigma_{\alpha 4 \max} = \pm \frac{M_z H}{J_z 2}. \quad (8)$$

Анализ уточненного НДС при изгибе прямого участка волновода позволил также выявить локальные области касательных напряжений по линиям соединения отдельных пластинок, составляющих поперечное сечение (см. рис. 2). Максимальные касательные напряжения определяются по формуле из работы [9]:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z t}{J_z 2} \frac{\mu^2}{(1 - \mu^2)}. \quad (9)$$

Касательные напряжения при изгибе прямого участка вызваны геометрической неоднородностью формы поперечного сечения волновода, имеют локальный самоуравновешенный характер и не влияют на общее НДС волновода.

Численные решения задачи. Проведены сравнительные расчеты численным методом конечных элементов (МКЭ) в ANSYS с использованием конечных элементов различных типов для прямых участков волноводов с разными типоразмерами их поперечных сечений: от $5,5 \times 11 \times 1,2$ до $100 \times 232 \times 2$ мм.

Характеристика и обоснования расчетной схемы и методов численного расчета. Для получения максимально однородного поля напряжений были определены длина прямого участка волновода для каждого типоразмера поперечного сечения, способы их закрепления и нагружения.

С учетом вычислительных особенностей МКЭ для расчета прямого участка волновода (см. рис. 1) выбрана эквивалентная схема (рис. 3, а), которая представляет собой тонкостенный стержень, жестко закрепленный с одной стороны и нагруженный единичным изгибающим моментом с другой.

Длина L прямых участков волноводов определяется из условия минимального влияния на получаемые результаты краевых эффектов от закреплений и нагружения, что описывается следующей формулой:

$$L = 6 \max(H, B). \quad (10)$$

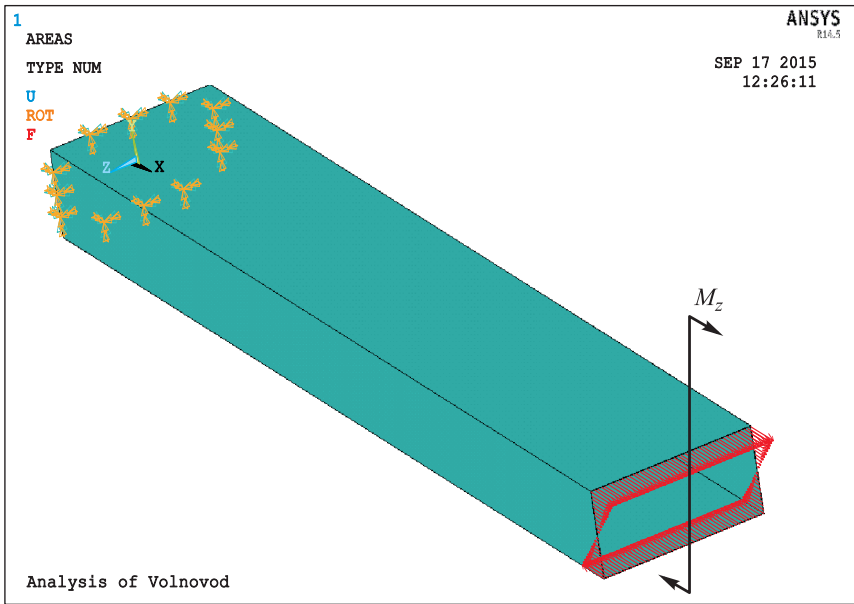
Вследствие того, что узлы объемных конечно-элементных моделей в МКЭ имеют только поступательные степени свободы, существуют известные трудности по приложению к объемным моделям сосредоточенных моментов. Авторами предложено смоделировать изгибающий момент в виде линейного распределения сил (см. рис. 3, а) по поперечному сечению прямого участка волновода с использованием разработанного программного обеспечения [17].

Для примера на рис. 3, б показано распределение максимальных нормальных напряжений при изгибе. Видно, что краевые эффекты от мест закрепления прямого участка и приложения к нему нагрузки имеют влияние на расстоянии, приблизительно равном максимальному характерному размеру поперечного сечения волновода.

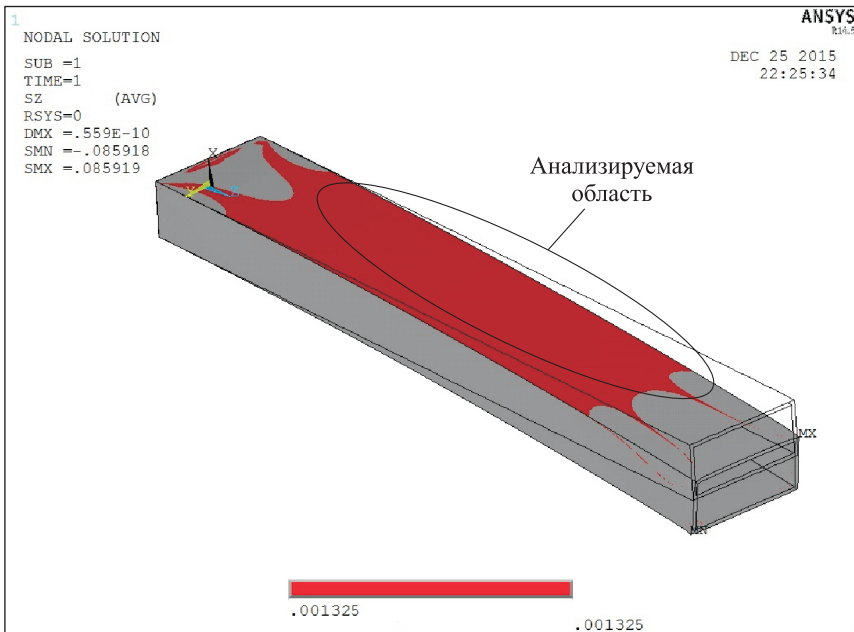
Значения максимальных нормальных (6) и касательных (9) напряжений, рассчитанные по предлагаемой методике, сравнивали со значениями, полученными по формуле Навье (2) и МКЭ в ANSYS. Сравнение выполняли для различных типов следующих конечных элементов с линейной и квадратичной функциями:

- балочные конечные элементы — Beam4, Beam188, Beam189;
- оболочечные конечные элементы — линейный Shell181 и квадратичный Shell281;
- твердотельные конечные элементы — линейный Solid185 и квадратичный Solid98.

Число конечных элементов определяется условием достижения максимально возможного однородного поля напряжений (см. рис. 3, б) и минимального расстояния (примерно один максимальный характерный размер) от границ этого однородного поля до мест закрепления и нагружения (рис. 3, а).



a

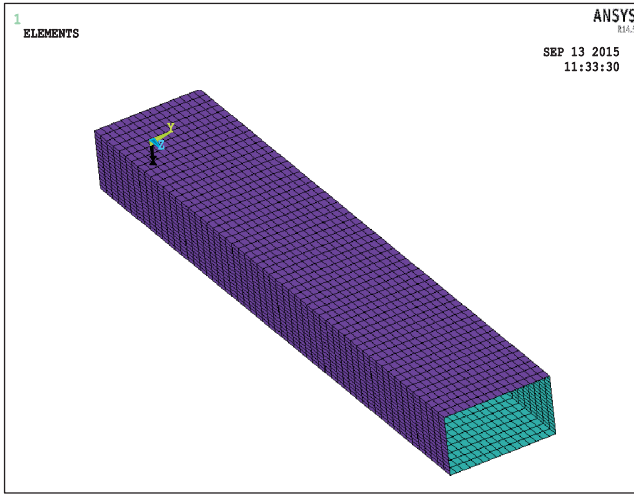


б

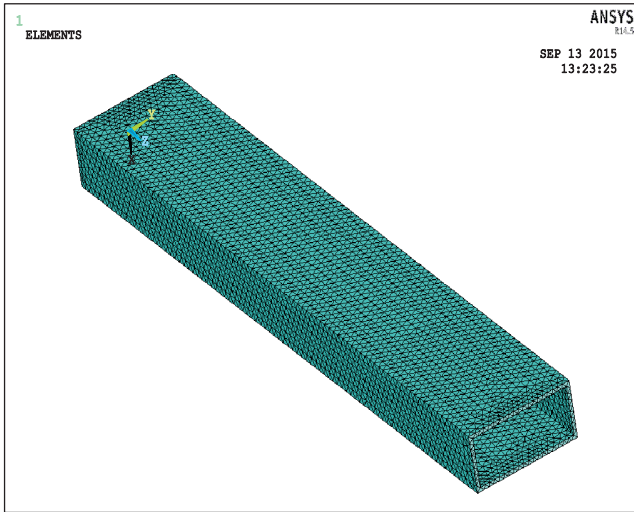
Рис. 3. Расчет прямого участка волновода в ANSYS:

a — расчетная схема приложения момента; *б* — изоповерхность максимальных нормальных напряжений при изгибе

Число конечных элементов составило: для стержневой ~1000, для оболочечной модели 7000...9000 и для твердотельной модели 40 000...60 000 (см. рис. 4).



a



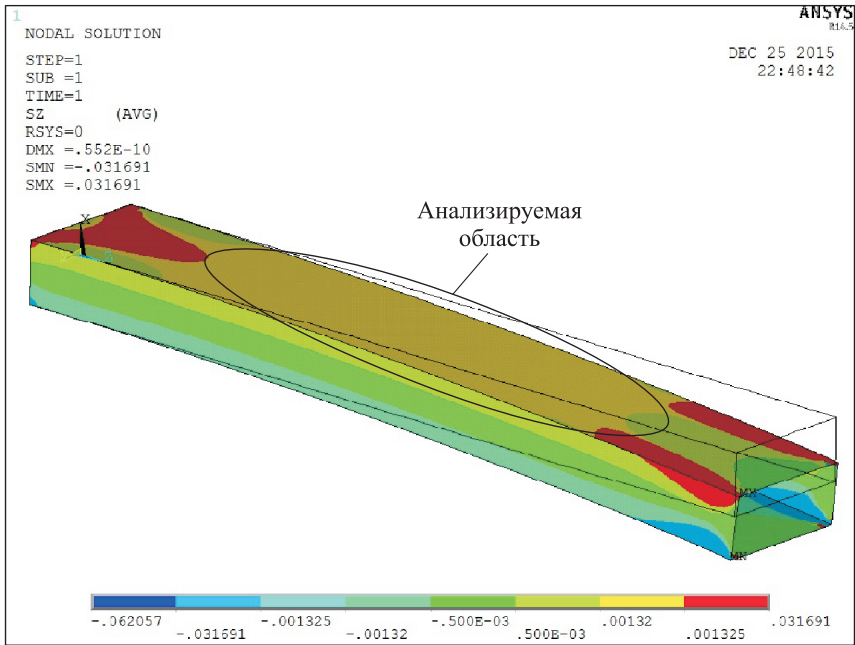
б

Рис. 4. Конечно-элементная сетка для волновода сечением 15×35 мм: оболочечные (а) и твердотельные (б) конечные элементы

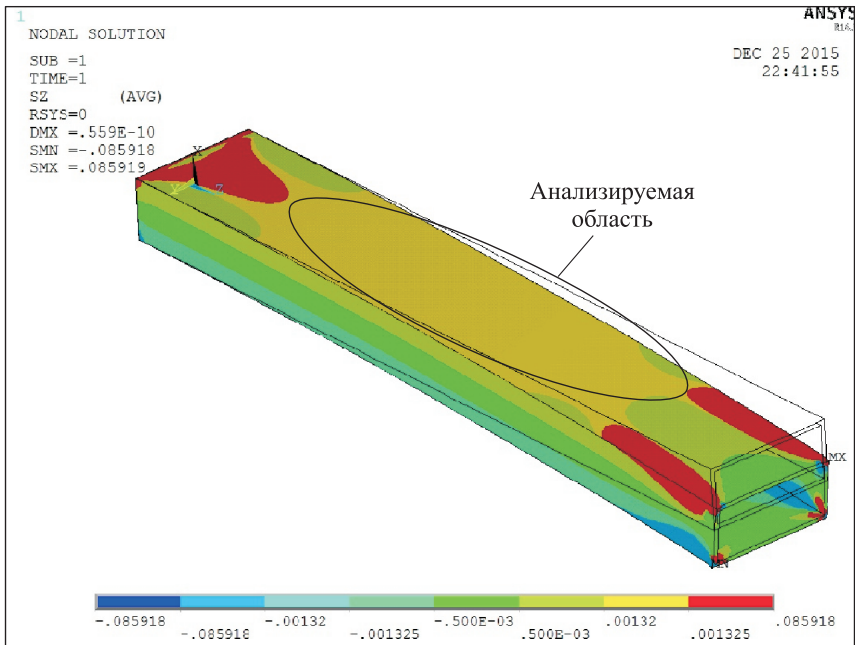
Нормальные напряжения. На рис. 5 показана характерная картина распределения изгибных нормальных напряжений в пластинках прямого участка волновода, полученная при расчетах с применением оболочечных и твердотельных конечных элементов.

Результаты расчета максимальных изгибных нормальных напряжений в пластинках прямого участка волновода по всем сравниваемым методикам сведены в табл. 1.

При оценке относительного отклонения результатов в качестве сравнительного значения максимальных напряжений принято значение, рассчитанное согласно предложенной авторами методике по зависимости (6).



a



b

Рис. 5. Результаты расчета напряжений в ANSYS для волновода сечением 15×35 мм: оболочечные (а) и твердотельные (б) конечные элементы Shell281 и Solid98

Таблица 1

Результаты расчета максимальных нормальных напряжений

Вид расчета	Номер типоразмера поперечного сечения волновода										
	№ 1 5,5×11×1,2	№ 2 10×61×2	№ 3 6,5×13×1,2	№ 4 8×16×1,2	№ 5 9,5×19×1,2	№ 6 12,6×28,5×1,2	№ 7 15×35×1,2	№ 8 25×58×2	№ 9 50×116×2	№ 10 100×232×2	
	Результаты расчетов и их сравнительная оценка по отношению к данным, полученным по предлагаемой методике										
По нашей методике	МПа	0,010072	0,0007258	0,0074265	0,005046	0,003647	0,0019187	0,001332	0,0002892	0,000073979	0,00001761
По формуле Навье	МПа	0,009923	0,00071575	0,0073287	0,004989	0,003611	0,0019037	0,001323	0,0002872	0,000073709	0,00001757
	%	-1,4801	-1,3932	-1,3159	-1,1283	-0,9874	-0,7850	-0,6774	-0,6774	-0,3650	-0,1828
Beam4,	МПа	0,009923	0,0007157	0,0073287	0,004989	0,003611	0,0019037	0,001323	0,0002872	0,000073708	0,00001757
Beam188, Beam189	%	-1,4801	-1,3932	-1,3159	-1,1283	-0,9874	-0,7850	-0,6774	-0,6774	-0,3650	-0,1828
Shell181	МПа	0,010079	0,00072364	0,0074104	0,005032	0,003635	0,001911	0,001327	0,0002881	0,000073813	0,00001759
	%	0,0649	-0,3057	-0,2161	-0,2764	-0,3326	-0,3984	-0,3779	-0,3770	-0,2240	-0,0784
Shell281	МПа	0,010066	0,00071923	0,0074081	0,005027	0,003631	0,0019094	0,001326	0,0002878	0,000073755	0,00001758
	%	-0,0641	-0,1913	-0,2471	-0,3853	-0,4412	-0,4870	-0,4755	-0,4842	-0,3024	-0,1693
Solid198	МПа	0,009925	0,00071576	0,0073298	0,004992	0,003612	0,0019037	0,001323	0,0002872	0,000073709	0,00001757
	%	-1,4630	-1,3913	к1,3015	-1,0749	-0,9578	-0,7841	-0,6781	-0,6779	-0,3646	-0,1806
Solid185	МПа	0,009881	0,000703	0,007309	0,004986	0,003613	0,001905	0,001325	0,000287	0,0000738	0,0000176
	%	3,1492	1,8978	1,5707	1,1997	0,9221	0,6798	0,5430	0,6052	0,2470	-0,0124
Отношение t/R	-	0,3333	0,3582	0,3116	0,2608	0,2243	0,1739	0,1481	0,1481	0,0769	0,0377

По полученным результатам (см. табл. 1) построены графики (рис. 6), показывающие отклонение значений по рассматриваемым и анализируемым методикам расчета относительно результатов, полученных по предложенной методике (6) для разных типоразмеров (№ 1...№ 10) поперечного сечения прямых участков волноводов.

Проведенные по предложенной методике расчеты прямых участков волноводов с различными типоразмерами поперечных сечений показали, что аналитическое решение (6) отличается от результатов, полученных другими методами, на 0,1...3,1 % (см. табл. 1).

Предложенная методика расчета и полученное аналитическое решение (6) для тонкостенного прямого участка волновода основаны на положениях теории пластин и оболочек. Корректность применения такого подхода следует из существующего в линейной теории тонких оболочек характерного отношения [9]:

$$h/R_0, \quad (11)$$

где h — толщина стенки оболочечной конструкции волновода; R_0 — минимальный радиус кривизны поперечного сечения оболочечной конструкции.

Согласно принятым обозначениям (рис. 5, б), отношение (11) примет вид

$$t/R, \quad (12)$$

где $R = 0,5h'$.

Значения характерного отношения (12) для волноводов всех рассмотренных типоразмеров сечений представлены в табл. 1, а также на графике (кривая 7 на рис. 6). Видно, что для рассмотренных типоразмеров поперечного сечения значение характерного отношения (12) значительно меньше рекомендуемого в [7] для тонких оболочек предельного значения: $t/R < 1$.

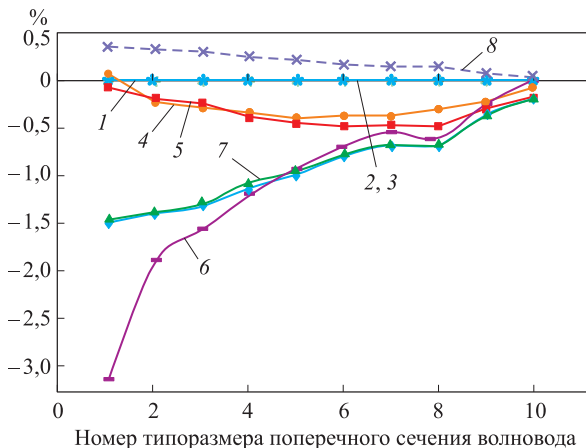


Рис. 6. Сравнение относительных значений (%) результатов расчета максимальных нормальных напряжений

Полученные по разным методикам результаты расчетов имеют тенденцию к сходимости при уменьшении значений характерного отношения (12) для типоразмеров с большими размерами поперечного сечения волновода, так как в

этом случае возникающие от использования гипотез Кирхгофа погрешности имеют наименьшее влияние на получаемые результаты [7].

При малых размерах поперечного сечения волновода значение характерного отношения (12) увеличивается и наблюдается значительное расхождение для максимальных нормальных напряжений, полученных с использованием теории пластин и оболочек (кривые 1, 4, 5), и результатов, полученных по формуле Навье (2) (кривая 2) для стержневых (кривая 3) и твердотельных (кривые 6, 7) конечных элементов.

При расчетах волноводов всех типоразмеров выполняется условие $t/R < 1$, а с учетом хорошей сходимости результатов, полученных по авторской методике (кривая 1) и с использованием оболочечных конечных элементов (кривые 4, 5), можно утверждать о более высокой точности предлагаемого аналитического решения (3) и полученного выражения (6) для максимальных напряжений.

Значения максимальных нормальных напряжений, рассчитанные по предлагаемой методике и выражению (6), всегда больше, чем значения, найденные с применением других методик (см. рис. 6).

Анализ полученных результатов расчетов по выражению (6) и другим методикам показывает, что они существенно расходятся при $t/R > 0,15$.

Такое граничное значение характерного отношения значительно меньше, чем предложенное В.В. Новожиловым в работе [7]. По мнению авторов настоящей работы, это можно объяснить особенностями НДС неосесимметричных тонкостенных конструкций прямоугольного поперечного сечения, что особенно следует учитывать при расчетах малых типоразмеров их поперечных сечений, специальных условиях изготовления, монтажа и эксплуатации, например для волноводов различных космических аппаратов связи.

Касательные напряжения. Значения максимальных касательных напряжений (табл. 2), рассчитанные по формуле (11), для рассматриваемых типоразмеров сечений волноводов составляют всего 0,18...1,5 % уровня максимальных нормальных напряжений (6). При возрастании характерного отношения (12) уровень максимальных касательных напряжений уменьшается (рис. 7).

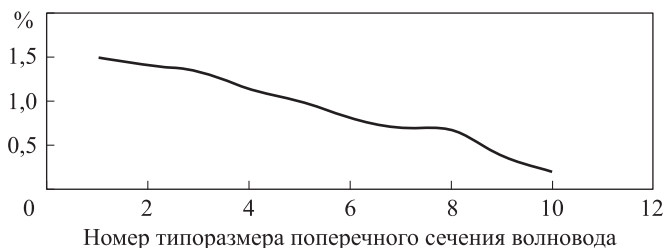


Рис. 7. Относительный уровень максимальных касательных напряжений (%)

По данным табл. 2 построен график (см. рис. 7) зависимости относительных максимальных касательных напряжений от максимальных нормальных напряжений, рассчитанных по формуле (6).

Результаты расчета максимальных касательных напряжений

Касательные напряжения	Ед. изм.	Номер типоразмера поперечного сечения волновода									
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
		5,5×11×1,2	10×61×2	6,5×13×1,2	8×16×1,2	9,5×19×1,2	12,6×28,5×1,2	15×35×1,2	25×58×2	50×116×2	100×232×2
Результаты расчетов и их сравнительная оценка по отношению к данным по предлагаемой методике											
По авторской методике	МПа	1,5E-4	9,8E-5	5,7E-5	3,6E-5	1,5E-5	9,1E-6	1,9E-6	1,1E-5	2,7E-7	3,2E-8
Относительный уровень	%	1,48	1,32	1,13	0,98	0,78	0,68	0,68	1,39	0,36	0,18
Отношение t/R	-	0,3582	0,3333	0,3116	0,2608	0,2243	0,1739	0,1481	0,1481	0,0769	0,0377

Остальные рассмотренные методы расчетов (формула Навье и МКЭ) не зафиксировали появление касательных напряжений в местах соединения пластинок. Следовательно, при анализе НДС прецизионных тонкостенных конструкций необходимо более строго подходить к выбору методов расчета.

Касательные напряжения могут оказывать значительное влияние на качество функционально-эксплуатационных характеристик волновода и его работоспособность в целом. Например, при знакопеременном изгибе волноводов, например, в результате периодического нагрева солнечным излучением и охлаждения в тени в течение всего заданного срока активного существования космического аппарата на орбите (10–15 лет) циклическое воздействие касательных напряжений может приводить к появлению в нанесенном электропроводящем покрытии микротрещин, их развитию в макротрещины и последующему отслаиванию.

Особенности МКЭ-решения. В настоящее время для расчетов тонкостенных конструкций, включая сложные пространственно-разветвленные волноводно-распределительные системы, наиболее широко используется численный МКЭ с применением различных настроек (типы, формы КЭ и др.). Анализ результатов, показанных на рис. 6, позволяет оценить особенности этих численных решений, сравнить и выбрать наиболее корректный подход в каждом конкретном случае.

Результаты расчетов изгибных нормальных напряжений для всех балочных типов конечных элементов Beam4, Beam188 и Beam189 (кривая 3) полностью идентичны и сопоставимы с результатами расчетов по формуле Навье (кривая 2). Следовательно, эти кривые совпадают (см. рис. 6), поскольку для всех балочных конечных элементов при определении изгибных нормальных напряжений используют формулу Навье (6) [13].

Результаты расчетов с твердотельными конечными элементами типа Solid185 и Solid98 (кривые 6, 7) практически полностью совпали с результатами расчетов по формуле Навье, так как узлы этих конечных элементов имеют только поступательные степени свободы, а в полученном аналитическом решении (6) поправка идет именно за счет учета изменения кривизны пластинок.

Использование твердотельных конечных элементов не позволяет учитывать влияние искривления тонкостенных элементов (пластинок) пространственных конструкций, определяются только нормальные напряжения от растяжения или сжатия продольных волокон.

Расчеты оболочечных конечных элементов типов Shell181 (кривая 4) и Shell182 (кривая 5) основаны на гипотезах теории пластин и оболочек [7, 13]. Это позволяет учитывать изменение кривизн тонкостенных элементов (пластинок), что вызывает существенный рост максимальных нормальных напряжений по сравнению с вычислениями по формуле Навье и МКЭ с твердотельными конечными элементами. Результаты расчетов оболочечных конечных элементов показывают (см. рис. 6) хорошую сходимость с данными, полученными по предлагаемой методике (6).

При использовании конечных элементов с линейной функцией формы (Shell181, Solid185) результаты расчетов существенно зависят от качества конечно-элементной сетки (размеров, упорядоченности структуры и других факторов), а для конечных элементов с квадратичной функцией формы (Shell182, Solid98) это влияние значительно слабее и получаемое численное решение более устойчиво. На рис. 6 хорошо заметна разность в сходимости кривых 6 и 7 для твердотельных конечных элементов при решении по формуле Навье (кривая 2), причем для линейных (кривая 6) амплитуда отклонений заметно больше, чем для квадратичных конечных элементов (кривая 7).

Установлено, что все рассмотренные способы сравнительных расчетов МКЭ не позволяют фиксировать появление касательных напряжений в местах соединения тонкостенных пластинок, составляющих неосесимметричное прямоугольное поперечное сечение прямых участков волноводов.

Следовательно, при выборе методов анализа НДС необходимо учитывать особенности, достоинства и недостатки каждого:

- теоретические зависимости балочных конечных элементов Beam4 созданы на основе теории стержней [1, 2], и возникновение касательных напряжений предполагается только от поперечных сил;
- теоретические зависимости балочных конечных элементов Beam188 и Beam189 построены с учетом зависимостей теории тонкостенных стержней и предполагают наличие касательных напряжений только от поперечных сил и крутящих моментов;
- твердотельные конечные элементы Solid185 и Solid98 имеют только поступательные степени свободы, что позволяет учитывать растяжение или сжатие продольных волокон при изгибе без влияния изменения их кривизн, которые в рассматриваемом случае нагружения и приводят к сдвигам;
- оболочечные конечные элементы Shell181 и Shell182 позволяют учесть изменение кривизн тонкостенных элементов (пластинок), однако касательные напряжения для них определяются по срединным поверхностям, где сдвиги отсутствуют, в том числе и по предлагаемому решению [4].

При расчетах оболочечных и твердотельных конечных элементов максимальные нормальные напряжения имеют склонность к схождению только при весьма малом характерном отношении (12), что и позволяет определить обоснованный критерий в выборе соответствующего типа конечного элемента для анализа НДС неосесимметричных тонкостенных конструкций прямых участков волноводов.

Результаты расчетов максимальных нормальных напряжений в пластинках прямого участка волновода по предлагаемой методике с использованием теории пластин и оболочек оказались наиболее близки к численным результатам МКЭ при применении оболочечных конечных элементов Shell181 с линейной функцией формы. Наибольшее расхождение (см. рис. 6) результатов для максималь-

ных нормальных напряжений, полученных по предлагаемой методике и МКЭ с использованием конечных элементов Shell181, не превысило 0,4 %.

Заключение. Согласно предложенному способу моделирования тонкостенных стержней неосесимметричного поперечного сечения, образованного отдельными элементами (пластинками), получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений для частного случая анализа НДС при изгибе прямого участка волновода.

Полученное с использованием полуобратного метода Сен-Венана аналитическое решение позволило при определении максимальных нормальных напряжений уточнить формулу Навье для случая расчета стержней тонкостенного замкнутого поперечного сечения и выявить локальные области появления касательных напряжений при изгибе в местах соединения пластинок, составляющих данное поперечное сечение тонкостенных стержней (прямых участков волноводов).

Проведены сравнительные расчеты изгибных нормальных напряжений прямых участков волноводов по формуле Навье и МКЭ в ANSYS для различных типов конечных элементов. Результаты показали хорошую сходимость, отклонение составило 0,1...3,1 %. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных численным МКЭ в ANSYS и по предлагаемой методике, также позволил выявить особенности напряженного состояния волноводов при изгибе и уточнить области применения в МКЭ различных типов конечных элементов.

Использование полученных результатов в практических целях при проектировании космических аппаратов с волноводно-распределительными системами разных типоразмеров поперечных сечений позволит уменьшить массу, оптимизировать трассировку прокладки волноводов и расстановку промежуточных опор, а также радиусы и технологию изготовления криволинейных участков.

Результаты исследований использованы в проектно-конструкторских и технологических работах при создании волноводно-распределительных и антенно-фидерных систем космических аппаратов типов «Экспресс», «Луч» и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнёв М.М., Наговицин В.Н. Методика расчета напряженно-деформационного состояния волноводно-распределительных систем космических аппаратов // Журнал СФУ. Техника и технологии. 2012. № 2. С. 150–161.
2. Анализ динамического состояния волноводно-распределительных систем от воздействия вибрационных нагрузок на этапе вывода космического аппарата на орбиту / П.Н. Сильченко, И.В. Кудрявцев, М.М. Михнёв, В.И. Халиманович, В.Н. Наговицин // Журнал СФУ. Техника и технологии. 2012. № 2. С. 205–219.
3. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

4. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
5. *Агамиров Л.В.* Сопротивление материалов. М.: Астрель, 2003. 256 с.
6. *Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Михнёв М.М.* Система дифференциальных уравнений для элемента волноводного тракта космических аппаратов // Междунар. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2–7 июля 2010 г. С. 172–174.
7. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 380 с.
8. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки / пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2009. 640 с.
9. *Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Зимин В.Н., Гоцелюк О.Б.* Особенности решения системы дифференциальных уравнений и определение «действительного» НДС волноводов при изгибе // Материалы Всерос. науч.-техн. конф. «Механика и математическое моделирование в технике». 17–19 мая 2016 г. М., 2016. С. 47–51.
10. *Власов В.З.* Избранные труды. Т. 2: Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 507 с.
11. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. М.: Высш. шк., 1982. 400 с.
12. *Бычков Д.В.* Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 387 с.
13. *Галанин М.П.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 591 с.
14. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости / пер. с англ.; под ред. Г.С. Шапиро. М.: Наука, 1979. 560 с.
15. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
16. *Александров А.В.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
17. *Модуль экспорта локальной области складчатых тонкостенных оболочечных конструкций волноводов с замкнутым поперечным сечением из стержневой модели в твердотельную модель ANSYS / П.Н. Сильченко, И.В. Кудрявцев, М.М. Михнёв, В.Н. Наговицин, О.Б. Гоцелюк // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661198, дата регистрации 10.12.2012.*

Кудрявцев Илья Владимирович — канд. техн. наук, доцент Сибирского федерального университета (Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный пр-т, д. 79).

Сильченко Пётр Никифорович — д-р техн. наук, профессор Сибирского федерального университета (Российская Федерация, 660041, г. Красноярск, Свободный пр-т, д. 79).

Михнёв Михаил Михайлович — канд. техн. наук, доцент, главный технолог АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва» (Российская Федерация, 662972, Красноярский край, г. Железногорск, ул. Ленина, д. 52).

Гоцелюк Ольга Борисовна — инженер 1-й категории АО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнёва» (Российская Федерация, 662972, Красноярский край, г. Железногорск, ул. Ленина, д. 52).

Пробьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Кудрявцев И.В., Сильченко П.И., Михнёв М.М., Гоцелюк О.Б. Сравнительная оценка решений системы дифференциальных уравнений в задаче изгиба прямых участков волноводов космических аппаратов связи // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 1. С. 4–23. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-4-23

COMPARATIVE EVALUATION OF DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF WAVEGUIDE STRAIGHT SECTIONS BEND IN COMMUNICATION SPACECRAFT

I.V. Kudryavtsev¹

P.N. Sil'chenko¹

M.M. Mikhnev²

O.B. Gotselyuk²

IKudryavcev@sfu-kras.ru

PSilchenko@sfu-kras.ru

mix@iss-reshetnev.ru

gotselukoll@ngs.ru

¹ Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

² JSC Academician M.F. Reshetnev Information Satellite Systems, Zheleznogorsk, Krasnoyarsk Region, Russian Federation

Abstract

It is possible to create the extended thin-walled waveguide structures with minimum mass parameters and the best functional and operational characteristics only when using the corresponding specified calculation methods and solving the nonlinear differential equations describing the static, dynamic and thermoelastic states. The study gives the analytical solution of the system of nonlinear differential equations in quotient derivatives describing the deflected mode of the thin-walled structures of the rectangular cross-sectional waveguides straight sections at their bend. We evaluated such solution and compared it to other known methods. In particular, we compared the maximum stress values when the straight sections of the thin-walled waveguides of various standard sizes are bent. The values were obtained by applying the offered technique and as a result of calculation using Navier formula. We also applied a numerical finite-element method in ANSYS and used various types of finite elements. Findings of the research revealed some features of waveguides stressed state at the bend, and helped to specify the fields of applying various types of finite elements

Keywords

Spacecraft, waveguide, straight section, nonaxisymmetric cross-section, thin-walled elements, plate, deflected mode, calculation methods, analytical solution, Navier formula, finite-element method

REFERENCES

[1] Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Mikhnev M.M., Nagovitsin V.N. Method of stress-deformation distribution computation for waveguide spacecraft systems. *Zhurnal SFU. Tekhnika i tekhnologii* [Journal of SibFU. Engineering and Technologies], 2012, no. 2, pp. 150–161 (in Russ.). Available at: http://elib.sfu-kras.ru/eng/bitstream/handle/2311/3052/03_Silchenko.pdf?sequence=1

- [2] Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Mikhnev M.M., Khalimanovich V.I., Nagovitsin V.N. Dynamic state analysis of waveguide distribution systems from vibration loads effects while launching spacecraft into the orbit. *Zhurnal SFU. Tekhnika i tekhnologii* [Journal of SibFU. Engineering and Technologies], 2012, no. 2, pp. 205–219 (in Russ.). Available at: http://elib.sfu-kras.ru/eng/bitstream/handle/2311/3056/10_Silchenke.pdf?sequence=1
- [3] Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Materials strength]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1999. 592 p.
- [4] Feodos'ev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Select problems and questions on materials strength]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 376 p.
- [5] Agamirov L.V. *Soprotivlenie materialov* [Materials strength]. Moscow, Astrel' Publ., 2003. 256 p.
- [6] Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Mikhnev M.M. Differential equation system for spacecraft waveguide cell. *Mezhd. konf. po diff. uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [Int. conf. on differential equations and dynamic systems. Suzdal', July 2–7, 2010]. Pp. 172–174 (in Russ.).
- [7] Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhaylovskiy E.I. *Lineynaya teoriya tonkikh obolochek* [First-order theory of thin shells]. Sankt-Petersburg, SPbGU Publ., 2010. 380 p.
- [8] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of plates and shells*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1969 (Russ. ed.: *Plastinki i obolochki*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2009. 640 p.).
- [9] Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Zimin V.N., Gotselyuk O.B. Features of differential equation system solution and determination of “real” waveguide stress-strain behavior under bending. *Materialy Vseross. nauch.-tekhn. konf. «Mekhanika i matematicheskoe modelirovanie v tekhnike»* [Proc. Russ. Sci.-Tech. Conf. Mechanics and mathematical simulation in technique. May 17–19, 2016]. Moscow, 2016. Pp. 47–51 (in Russ.).
- [10] Vlasov V.Z. *Izbrannye Trudy. T. 2: Tonkostennye uprugie sterzhni. Printsipy postroeniya obshchey tekhnicheskoy teorii obolochek* [Selectas. Vol. 2. Thin-walled elastic rods. Constructing principles of general technical theory of shells]. Moscow, AN SSSR Publ., 1963. 507 p.
- [11] Rzhantsyn A.R. *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1982. 400 p.
- [12] Bychkov D.V. *Stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh tonkostennykh konstruktsiy* [Structural mechanics of thin-walled rod constructions]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1962. 387 p.
- [13] Galanin M.P. *Metody chislennogo analiza matematicheskikh modeley* [Numerical analysis of mathematical models]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2012. 591 p.
- [14] Timoshenko S.P. and Goodier J.N. *Theory of elasticity*. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1951 (Russ. ed.: *Teoriya uprugosti*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 560 p.).
- [15] Parton V.Z., Perlin P.I. *Metody matematicheskoy teorii uprugosti* [Methods of mathematical elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 688 p.
- [16] Aleksandrov A.V. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of elasticity and plasticity theory]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1990. 400 p.

[17] Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Mikhnev M.M., Nagovitsin V.N., Gotselyuk O.B. Modul' eksporta lokal'noy oblasti skladchatykh tonkostennykh obolocheynykh konstruktsiy volnovodov s zamknutym poperechnym secheniem iz sterzhnevoy modeli v tverdotel'nyuyu model' ANSYS [Local region exporter for folded thin-walled shell waveguide construction structure with closed cross-section from beam to solid ANSYS model]. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2012661198 [Computer program registration certificate no. 2012661200], reg. date 12.2012.

Kudryavtsev I.V. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Siberian Federal University (Svobodnyi pr. 79, Krasnoyarsk, 660041 Russian Federation).

Sil'chenko P.N. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Siberian Federal University (Svobodnyi pr. 79, Krasnoyarsk, 660041 Russian Federation).

Mikhnev M.M. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor, Production Manager, JSC Academician M.F. Reshetnev Information Satellite Systems (Lenina ul. 52, Zheleznogorsk, Krasnoyarsk Region, 662972 Russian Federation).

Gotselyuk O.B. — engineer of the first category, JSC Academician M.F. Reshetnev Information Satellite Systems (Lenina ul. 52, Zheleznogorsk, Krasnoyarsk Region, 662972 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kudryavtsev I.V., Sil'chenko P.N., Mikhnev M.M., Gotselyuk O.B. Comparative Evaluation of Differential Equation Solutions in the Problem of Waveguide Straight Sections Bend in Communication Spacecraft. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 1, pp. 4–23.

DOI: 10.18698/0236-3941-2017-1-4-23