

М. А. К о т о в, В. В. К у з е н о в

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРСПЕКТИВНЫХ  
ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

*Кратко описан алгоритм численного решения уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу в областях сложной пространственной формы. Приведены результаты расчета обтекания сверхзвуковым потоком воздуха гиперзвукового летательного аппарата Waverider. Изложены различные методы создания сложных моделей поверхностей перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов X-43, Waverider, X-51A.*

**E-mail: mikhail\_kotov88@mail.ru; kuzenov@ipmnet.ru**

**Ключевые слова:** газовая динамика, гиперзвуковые летательные аппараты, уравнения Навье–Стокса, численные методы, адаптивные декартовы сетки, геометрическое моделирование сложных поверхностей.

К одним из наиболее важных и сложных проблем аэротермодинамики аэрокосмических аппаратов можно отнести вопросы моделирования сложных (трехмерных) элементов течения у поверхности гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА): отрывных течений и течений присоединения, ламинарно-турбулентных переходов, сложных ударно-волновых взаимодействий). Однако реальные физические эксперименты в этой области отличаются высокой стоимостью и сопряжены со множеством технологических и технических трудностей. Поэтому большое значение для оптимизации конструкции и рабочих характеристик ГЛА имеет численное моделирование аэротермодинамических и теплофизических процессов. При рассмотрении сверх- и гиперзвуковых течений необходимо также, чтобы вычислительные коды, предназначенные для расчетов течений газа в рамках уравнений Эйлера, Навье–Стокса и Рейнольдса, включали в себя специализированные базы данных по термодинамическим, кинетическим и транспортным свойствам индивидуальных газов и газовых смесей.

На первом этапе из всей совокупности указанных задач интерес представляют лишь моделирование формы изучаемых объектов техники, их размеров и взаимное расположение, а не физических свойств этих тел. Построение таких поверхностей базируется на аналитической и дифференциальной геометрии, методах вычислительной математики. Усложняющей особенностью при построении геометрической модели ГЛА является необходимость учета многосвязности областей, составляющих поверхность тела, и сопряжений между элементами поверхности. Такой тщательный учет особенностей формы поверхности связан с решением последующей задачи построения расчетных сеток

высокого качества. Создание сложной модели поверхности таким способом представляет собой достаточно медленный, трудоемкий процесс и требует многократного редактирования модели поверхности.

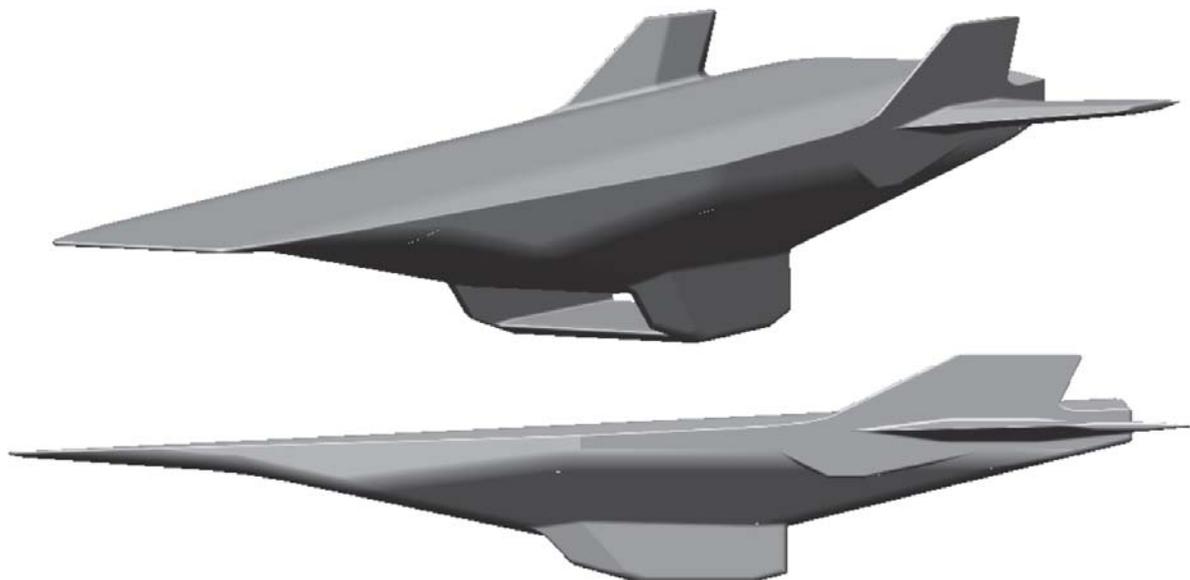
На следующем этапе решения задачи оптимизации конструкции и рабочих характеристик ГЛА целесообразно создание вычислительных моделей, расчетных сеток, которые позволяют проводить расчетно-теоретические исследования аэротермодинамики перспективных ГЛА и космических аппаратов, предназначенных для входа в плотные слои атмосфер планет и возвращения на Землю [1, 2].

**Постановка задачи.** Цель настоящей работы — создание вычислительных аэротермодинамических моделей ГЛА, которые опираются на систему уравнений вязкого теплопроводного газа и могут быть применены для проведения численных экспериментов в широком диапазоне полетных условий. В них используются трехмерные уравнения Навье–Стокса, осредненные по Рейнольдсу, и они позволяют находить теплофизические характеристики потока в расчетной области сложной пространственной формы. Расчетная область включает в себя поле течения в невозмущенном потоке, за фронтом ударной волны, в следе за обтекаемым телом. Для решения рассматриваемой системы уравнений расчетная область представляется в виде регулярной декартовой (структурированной) сетки.

Одна из важных задач настоящей работы состоит также в геометрическом моделировании сложных поверхностей перспективных ГЛА типа Hyper-X [4, 5], Waverider [6], X-51A [7] в системе автоматизированного проектирования (САПР) SolidWorks [8].

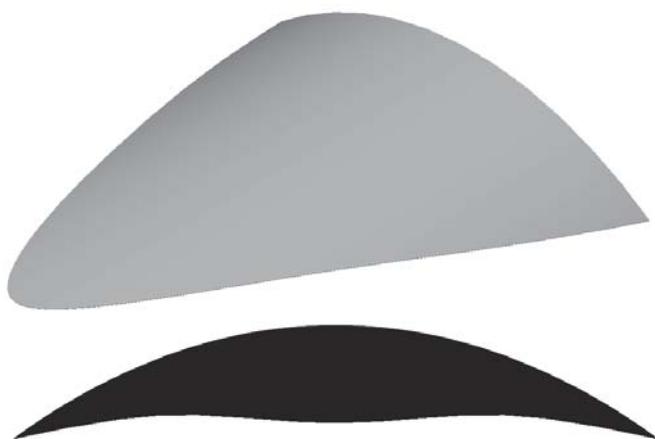
**Описание процесса геометрического моделирования тел сложной пространственной формы.** Реальные ГЛА занимают некоторый конечный объем в пространстве, и для геометрического моделирования таких тел в математике используются объекты, называемые твердыми телами (или деталями). Основной метод моделирования геометрии тел использует форму простейших тел (прямоугольную призму, цилиндр, конус, шар, тор и др.), которые имеют одну оболочку. Далее путем удаления и/или добавления в определенных местах дополнительного объема (материала) получают тело требуемой формы. Существует другой вариант многомерного моделирования геометрии тел. Этот подход соответствует реальному технологическому процессу изготовления детали. В данном случае на передний план выходит не форма модели, а замысел проекта, т.е. последовательность выполняемых действий. Такой подход к моделированию использует САПР SolidWorks.

Система автоматизированного проектирования SolidWorks [8] предназначена для моделирования деталей и сборок в трехмерном пространстве с возможностью проведения различных видов экспресс-



**Рис. 1. Общий вид геометрии поверхности модели экспериментального беспилотного ГЛА X-43**

анализа, а также оформления конструкторской документации в соответствии с требованиями ЕСКД. Система использует графический интерфейс Microsoft Windows. В САПР SolidWorks имеются средства конвертации и сохранения в форматах, которые доступны для открытия и редактирования в других программах геометрического моделирования (Autodesk 3dsMax, AutoCAD и т.д.).



**Рис. 2. Изометрия поверхности модели экспериментального ГЛА Waverider**

С использованием инструментов, входящих систему САПР SolidWorks, была построена геометрическая модель, приблизительно соответствующая форме поверхности ГЛА X-43 [9, 10] (рис. 1). Эта форма поверхности ГЛА X-43 и поверхностная сетка на ней в дальнейшем была использована для проведения трехмерных термоаэродинамических расчетов течения сжимаемого газа для условий, при которых проводились полетные испытания ГЛА X-43 [11]. На рис. 2 представлен вид окончательного варианта модели поверхности гиперзвукового аппарата типа Waverider [6]. На рис. 3 приведен вид предварительного варианта геометрической формы модели ГЛА X-51А [12]. Отметим, что в дальнейшем планируется доработка формы модели ГЛА X-51А и построение некоторых ее важных конструктивных элементов (ГПВРД, рули высоты и поворота), а также уточнение построенных элементов поверхности.



**Рис. 3. Предварительный вариант поверхности модели экспериментального беспилотного ГЛА X-51A. Вид в изометрии**

**Математическая постановка** рассматриваемой задачи сводится к системе трехмерных нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, которая выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + \sigma_{ij}) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho E u_j + u_j \sigma_{ij} - Q_j) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $t, x_j$  – время и декартовы координаты;  $\rho, u_j$  и  $E = h/\gamma + u_j^2/2$  – осредненные среднемассовые плотность, компоненты скорости и полная энергия ( $h = C_p T$  – энтальпия идеального газа ( $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении),  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей).

Тензор вязких напряжений  $\sigma_{ij}$ , тепловой поток  $Q_j$  и входящий в  $\sigma_{ij}$  тензор скоростей деформации  $S_{ij}$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \delta_{ij} P - \frac{1}{\text{Re}} \left[ 2\mu \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \delta_{ij} \right) + \sigma_{ij}^T \right]; \\ Q_j &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial x_j} - Q_j^T \right); \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

в которых тензор рейнольдсовых напряжений  $\sigma_{ij}^T$  и турбулентный поток теплоты  $Q_j^T$  имеют следующий вид:  $\sigma_{ij}^T = 2\mu_T \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \delta_{ij} \right)$ ,

$Q_j^T = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial h}{\partial x_j}$ . Здесь  $P = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \rho h$  — статическое давление;  $\mu$  и  $\mu_T$  — коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкостей;  $Pr$  и  $Pr_T$  — ламинарное и турбулентное числа Прандтля,  $Re$  — число Рейнольдса. По повторяющимся индексам  $i, j, k$  везде в тексте предполагается суммирование. Система уравнений дополняется коэффициентом молекулярной вязкости  $\mu$ , кг/(м · с), вычисляемым по формуле Сазерленда

$$\mu = 1,458 \cdot 10^{-6} T^{1,5} \frac{1}{110,4 + T}.$$

Расчет турбулентных параметров течения может быть проведен на основе дифференциальной двухпараметрической  $q-\omega$  модели Кокли [13]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho q) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho q u_j) - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + Pr_q \mu_T) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] = H_q;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \omega u_j) - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + Pr_\omega \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = H_\omega;$$

$$H_q = \frac{\rho q}{2} \left( \frac{C_\mu f S}{\omega} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \omega \right); \quad H_\omega = \rho \left[ C_1 \left( C_\mu S - \frac{2}{3} \omega \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - C_2 \omega^2 \right];$$

$$S = 2 \left( S_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \omega \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad \mu_T = Re C_\mu f \rho \frac{q^2}{\omega}.$$

Пристеночная функция  $f$  имеет вид  $f = 1 - \exp(-\alpha \rho q y \cdot Re/\mu)$ , где  $y$  — расстояние по нормали от твердой поверхности; параметр  $C_1 = 0,045 + 0,405 f$ , а остальные эмпирические константы принимают следующие значения:  $C_2 = 0,92$ ,  $Pr_q = 1$ ,  $Pr_\omega = 1,3$ ,  $C_\mu = 0,09$ ,  $\alpha = 0,0065$ . В приведенных формулах параметр  $q$  отнесен к модулю скорости набегающего потока  $u_1$ . Псевдозавихренность  $\omega$  обезразмеривается на величину  $u_1 L_1^{-1}$ .

Для дальнейших построений систему уравнений (1) удобно представить в векторной форме в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(Q)}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}(Q)}{\partial y} + \frac{\partial \vec{H}(Q)}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Вектор консервативных переменных  $\vec{Q}$  и векторы потоков  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$ ,  $\vec{H}$  могут быть записаны в следующей форме:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \sigma_{xx} \\ \rho u v - \sigma_{xy} \\ \rho u w - \sigma_{xz} \\ (\rho E + P) u - u \sigma_{xx} - v \sigma_{xy} - w \sigma_{xz} + Q_x \end{pmatrix};$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u - \sigma_{yx} \\ \rho v v + P - \sigma_{yy} \\ \rho v w - \sigma_{yz} \\ (\rho E + P) v - u \sigma_{yx} - v \sigma_{yy} - w \sigma_{yz} + Q_y \end{pmatrix};$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w u - \sigma_{zx} \\ \rho w v - \sigma_{zy} \\ \rho w w + P - \sigma_{zz} \\ (\rho E + P) w - u \sigma_{zx} - v \sigma_{zy} - w \sigma_{zz} + Q_z \end{pmatrix}.$$

Газовая среда, натекающая на ГЛА, рассматривается как совершенный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1,4$ .

Для численного решения уравнений Навье–Стокса и дифференциальной двухпараметрической  $q-\omega$ -модели вихревой вязкости Кокли использован явный интегроинтерполяционный метод, применение которого для уравнений (2) на равномерной декартовой сетке приводит к следующей конечно-разностной схеме:

$$\frac{\vec{Q}_{i,j,k}^{n+1} - \vec{Q}_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{\vec{F}_{i+1/2,j,k}^n - \vec{F}_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{\vec{G}_{i,j+1/2,k}^n - \vec{G}_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} + \frac{\vec{H}_{i,j,k+1/2}^n - \vec{H}_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  — шаги сетки в направлениях осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Тройной целый нижний индекс  $(i, j, k)$  обозначает значения сеточных функций, отнесенные к центрам соответствующих трехмерных дискретных регулярных ячеек, а полуцелые нижние индексы относятся к значениям функций на границах ячеек. При численном решении гиперболической (“невязкой”) части уравнения величины с полуцелыми индексами  $\vec{Q}_{i\pm 1/2,j,k}$ ,  $\vec{Q}_{i,j\pm 1/2,k}$ ,  $\vec{Q}_{i,j,k\pm 1/2}$  находятся из решения соответствующих задач Римана [14] (для построения численной схемы следует решать задачу Римана на каждой из границ дискретных ячеек). Векторы потоков, которые входят в уравнение (2), определяются следующим образом:

$$\vec{F}_{i\pm 1/2,j,k}^n = \vec{F} \left( \vec{Q}_{i\pm 1/2,j,k} \right),$$

$$\vec{G}_{i,j\pm 1/2,k}^n = G \left( \vec{Q}_{i,j\pm 1/2,k} \right), \quad \vec{H}_{i,j,k\pm 1/2}^n = H \left( \vec{Q}_{i,j,k\pm 1/2} \right).$$

Для нахождения потоковых величин  $F_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL}$ ,  $G_{i,j\pm 1/2,k}^{HLL}$ ,  $H_{i,j,k\pm 1/2}^{HLL}$  применяется TVD-монотонизированный вариант метода Хартена–Лакса–Ван Лира (HLL) (см., например, [14]). Функциональный вид выражений для векторов потоков  $\vec{F}_{i\pm 1/2,j,k}^n$ ,  $\vec{G}_{i,j\pm 1/2,k}^n$ ,  $\vec{H}_{i,j,k\pm 1/2}^n$  осно-

ван на обеспечении точного выполнения законов сохранения только на двух разрывах типа ударных волн (не рассматриваются разрывы типа контактных или тангенциальных):

$$F_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL} - \vec{F}_{R,j,k}^n = \lambda_R (Q_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL} - Q_{R,j,k}^n),$$

$$F_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL} - \vec{F}_{L,j,k}^n = \lambda_L (Q_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL} - Q_{L,j,k}^n).$$

Отсюда находятся соотношения для потоковых величин  $F_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL}$  и  $Q_{i\pm 1/2,j,k}^{HLL}$ . Например, вдоль оси  $x$  эти потоки через грани расчетной ячейки вычисляются с помощью следующего выражения:

$$F_{i+1/2}^{HLL} = \begin{cases} F_L, & 0 \leq \lambda_L; \\ \frac{\lambda_R F_L - \lambda_L F_R + \lambda_L \lambda_R (q_R - q_L)}{\lambda_R - \lambda_L}, & \lambda_L \leq 0 \leq \lambda_R; \\ F_R, & \lambda_R \leq 0, \end{cases}$$

где  $F_L = F(q_L)$ ,  $F_R = F(q_R)$ . Реконструкция векторов консервативных переменных на гранях ячейки выполнялась согласно выражениям:

$$q_L = q_i + 0,5 \min \text{mod} (\Delta q_{i-1}, \Delta q_i);$$

$$q_R = q_{i+1} - 0,5 \min \text{mod} (\Delta q_{i+1}, \Delta q_i);$$

$$\min \text{mod} (a, b) = \begin{cases} \text{sign} (a) \min (|a|, |b|), & ab > 0; \\ 0, & ab \leq 0, \end{cases}$$

где  $\Delta q_i = q_i - q_{i-1}$ , а функция  $\min \text{mod}(\cdot)$  покомпонентно применяется к паре векторных аргументов. Собственные значения  $\lambda_L$ ,  $\lambda_R$  на вертикальных гранях ячейки вычислялись по вектору осредненных значений физических переменных  $U^* = (\rho^*, u^*, v^*, E^*)$ :

$$\lambda_L = u^* - c, \quad \lambda_R = u^* + c, \quad c = \sqrt{\left\{ E^* - \frac{(u^*)^2 + (v^*)^2}{2} \right\} (\gamma - 1) \gamma},$$

где

$$\rho^* = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}, \quad u^* = \frac{\rho_L u_L + \rho_R u_R}{\rho_L + \rho_R},$$

$$v^* = \frac{\rho_L v_L + \rho_R v_R}{\rho_L + \rho_R}, \quad E^* = \frac{\rho_L E_L + \rho_R E_R}{\rho_L + \rho_R}.$$

Вычисление потоковых величин  $G_{i,j\pm 1/2,k}^{HLL}$ ,  $H_{i,j,k\pm 1/2}^{HLL}$  по методу Хартена–Лакса–Ван Лира через грани расчетных ячеек вдоль осей  $z$ ,  $y$  осуществлялось аналогично описанному способу.

При аппроксимации диффузионной составляющей векторов потоков  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$ ,  $\vec{H}$  на грани расчетной ячейки применяется разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности. В этом случае

производные вычислялись по формулам:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j,k} = \frac{U_{i+1/2,j,k} - U_{i-1/2,j,k}}{\Delta x};$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{i,j,k} = \frac{U_{i+1/2,j+1/2,k} + U_{i,j+1/2,k} - U_{i+1/2,j-1/2,k} - U_{i,j-1/2,k}}{4\Delta x};$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{i,j,k} = \frac{U_{i+1/2,j,k+1/2} + U_{i,j,k+1/2} - U_{i+1/2,j,k-1/2} - U_{i,j,k-1/2}}{4\Delta z};$$

здесь  $U$  — вектор неконсервативных зависимых переменных решаемой задачи.

В настоящее время активно развивается направление вычислительной математики, связанное с использованием прямоугольных сеток при расчетах нестационарных аэрогидродинамических течений в областях сложной геометрической формы. В этом случае при дискретизации краевых условий используется представление искомой сеточной функции многомерным полиномом невысокой степени. Наиболее распространенным является использование метода наименьших квадратов, процедур билинейной и биквадратичной интерполяции.

В настоящей работе для решения системы трехмерных нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса используются прямоугольные декартовы сетки (в этом случае отсутствует проблема, связанная с вырождением системы координат) и применен метод погруженной границы с фиктивными ячейками [15, 16] для аппроксимации краевых условий на криволинейных границах областей сложной пространственной формы. При этом предполагается, что восстановление значений газодинамических параметров в фиктивных узлах погруженной расчетной границы проводится в плоскостях  $XU$  (аналогично работам [15,16]), которые перпендикулярны оси симметрии ГЛА. Процесс определения решения в фиктивных узлах рассмотрим для гиперболической части уравнений Эйлера системы уравнений Навье–Стокса.

Для поиска стационарного решения уравнений Эйлера сформулируем краевые условия на границе расчетной области: считаем, что через левую границу ( $x = 0$ ) вдувается сверхзвуковой невозмущенный поток, на правой ( $x = L$ ) и верхней ( $x = h$ ) расчетных границах ставится условие выхода сверхзвукового потока из расчетной области. На нижней границе ( $y = 0$ ) задается условие симметрии. На поверхности обтекаемого тела задаются условия вида:  $\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$ ,  $V_n = 0$ ,  $\frac{\partial V_\tau}{\partial n} = 0$ ,

$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\rho V_\tau^2}{R}$  (где  $R$  — локальный радиус кривизны криволинейной поверхности). Для аппроксимации краевых условий на криволинейной

границе используются три узла  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_G, y_G)$  и одна точка на границе  $(x_O, y_O)$ , как показано на рис. 4 [15–17]. На криволинейной границе твердого тела для уравнений Эйлера реализуется условие непротекания. В этом случае нормальная составляющая скорости  $u^n$  равна нулю:

$$u_O^n = u_O \cos \theta + v_O \sin \theta = 0,$$

где  $\theta$  — угол наклона нормали (см. рис. 4). Тангенциальная составляющая скорости равна  $u_O^\tau = -u_O \sin \theta + v_O \cos \theta$ . Значения величин  $u_O$  и  $v_O$  в точке на границе  $(x_O, y_O)$  связаны билинейными интерполяционными соотношениями с известными значениями в двух приграничных узлах  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и искомым значением в фиктивном узле  $(x_G, y_G)$ :

$$u_O = \begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_G \end{pmatrix};$$

$$v_O = \begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_G \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_G \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_G \end{pmatrix} \sin \theta \right] = 0.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_G & y_G \end{pmatrix}^{-1},$$

тогда

$$u_G \cos \theta + v_G \sin \theta = -\frac{b_1}{b_G} (u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta) - \frac{b_2}{b_G} (u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta).$$

Для однозначного определения искомым значений скоростей  $u_G$ ,  $v_G$  в фиктивном узле  $(x_G, y_G)$  необходимы дополнительные уравнения. Для замыкания системы используем краевое условие  $\frac{\partial u^\tau}{\partial n} = 0$  на криволинейной границе в точке  $O$ . Аппроксимация этого краев-

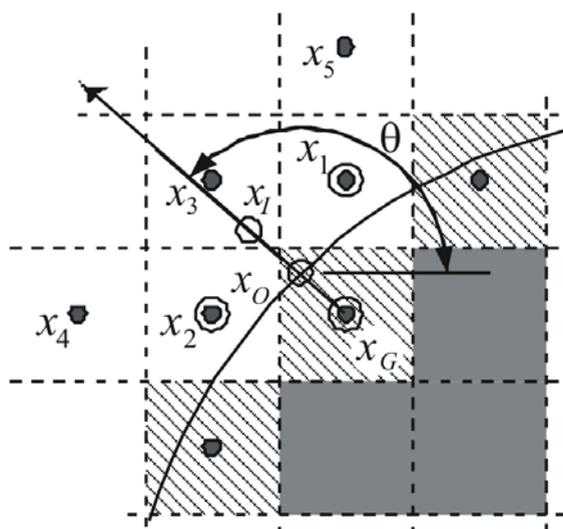


Рис. 4. Используемые при дискретизации краевых условий узлы расчетной сетки и вспомогательные точки

го условия также осуществляется с помощью процедуры билинейной интерполяции:

$$u_G \sin \theta - v_G \cos \theta =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_G & y_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \sin \theta - v_1 \cos \theta \\ u_2 \sin \theta - v_2 \cos \theta \\ (\partial u^\tau / \partial n)_O \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_G & y_G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1},$$

тогда  $u_G \sin \theta - v_G \cos \theta = d_1 (u_1 \sin \theta - v_1 \cos \theta) + d_2 (u_2 \sin \theta - v_2 \cos \theta) + d_O (\partial u^\tau / \partial n)_O$ .

Введем вспомогательные обозначения:

$$RHS_1 = -\frac{b_1}{b_G} (u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta) - \frac{b_2}{b_G} (u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta);$$

$$RHS_2 = d_1 (u_1 \sin \theta - v_1 \cos \theta) + d_2 (u_2 \sin \theta - v_2 \cos \theta).$$

Получим два уравнения:

$$u_G^{k+1} \cos \theta + v_G^{k+1} \sin \theta = RHS_1;$$

$$u_G^{k+1} \sin \theta - v_G^{k+1} \cos \theta = RHS_2.$$

Откуда можно получить

$$u_G^{k+1} = RHS_1 \cos \theta + RHS_2 \sin \theta;$$

$$v_G^{k+1} = RHS_1 \sin \theta - RHS_2 \cos \theta.$$

Величина  $\rho_G$  определяется из краевого условия на границе  $\partial \rho / \partial n = 0$ , которое аппроксимируется линейным соотношением

$$\rho_G = \begin{pmatrix} 1 & x_G & y_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ (\partial \rho / \partial n)_O \end{pmatrix}.$$

Значение  $E_G$  находим из краевого условия для давления на границе  $\partial p / \partial n = \rho (u^\tau)^2 / R$  (где  $R$  — локальный радиус кривизны криволинейной поверхности):

$$E_G = \frac{p_G}{\rho_G (\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u_G^2 + v_G^2);$$

$$p_G = \begin{pmatrix} 1 & x_G & y_G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ (\partial p / \partial n)_O \end{pmatrix}.$$

Величину  $u_O^\tau$  в точке  $O$  на границе можно получить из уравнения

$$u_O^\tau = \begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \sin \theta - v_1 \cos \theta \\ u_2 \sin \theta - v_2 \cos \theta \\ (\partial u^\tau / \partial n)_O \end{pmatrix},$$

а величина  $\rho_O$  может быть определена из уравнения

$$\rho_O = \begin{pmatrix} 1 & x_O & y_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ (\partial \rho / \partial n)_O \end{pmatrix}.$$

Для сохранения устойчивости необходимо предусмотреть механизм ограничения компонент вектора наклонов физических переменных

$$S_{OG} = U_G - U_O, \quad \text{где } U_G = \begin{pmatrix} \rho_G \\ u_G \\ v_G \\ E_G \end{pmatrix}, \quad U_O = \begin{pmatrix} \rho_O \\ u_O \\ v_O \\ E_O \end{pmatrix}.$$

С этой целью вводится дополнительная точка-образ  $I$  с координатами  $(x_I, y_I)$ , которые определяются выражением  $\begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix}$ . Далее на отрезке  $IO$  с помощью процедуры интерполяции вычисляется вектор наклонов физических переменных по их значениям в узлах  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_5, y_5)$ :

$$S_{IO} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 \\ u_1 & u_1 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_O - x_I \\ y_O - y_I \\ x_O^2 - x_I^2 \\ y_O^2 - y_I^2 \end{pmatrix}.$$

Полученные наклоны  $S_{OG}$  и  $S_{IO}$  используются для восстановления окончательного вектора физических переменных  $U_G$  в фиктивном узле  $(x_G, y_G)$ :  $U_G = U_O + \min \text{ mod } (S_{OG}, S_{IO})$ . Представленный метод погруженной границы с фиктивными ячейками, который используется

для расчета нестационарных, осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса на прямоугольных сетках, адаптируется к особенностям течения и границе обтекаемого тела генерацией и сгущением сетки по методу AMR [18–21]. В этом случае создается структурированная прямоугольная сетка, каждая расчетная ячейка которой представляется вершиной дерева и имеет заданный уровень иерархии.

**Результаты численного моделирования.** Расчетная область выполнена в виде прямоугольного параллелепипеда, внутри которого помещена модель ГЛА Waverider. При проведении численных расчетов использовалась адаптивная к границам ГЛА сетка, построенная в декартовой системе координат. Характерное число узлов регулярной расчетной сетки составляло  $3 \cdot 10^6$ . На левую границу параллелепипеда (вход в расчетную область) вдувался однородный поток воздуха, параметры которого соответствовали высоте  $H = 30$  км от поверхности Земли. Расчеты проведены для углов атаки от  $0^\circ$  до  $5^\circ$ , числа Маха  $M = 6$  (в набегающем потоке) и при следующих значениях газодинамических параметров на входе: температура 227 К; давление 1200 Па; плотность  $0,0184 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука 302 м/с; динамическая вязкость  $0,148 \cdot 10^{-4} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$ . На рис. 5–8 (3-я и 4-я полосы обложки) приведены результаты расчетов, выполненных с помощью приведенной методики.

На рис. 5 и 7 показаны распределения чисел Маха для углов атаки  $0^\circ$  и  $5^\circ$ . Рис. 6 и 8 соответствуют распределениям поля температуры при аналогичных углах атаки.

Приведенные в настоящей работе графические распределения могут быть описаны в виде следующей картины течения: вблизи носа и нижней поверхности ГЛА возникает головной скачок уплотнения и начинается формирование пограничного слоя, в области перехода от носовой поверхности к задней части ГЛА находится область волн разрежения (для углов атаки, больших 0), далее по потоку наблюдается “горло” следа (донная область течения) с примыкающими к нему хвостовыми скачками, замыкается течение ближним и дальним следом.

Из приведенных распределений следует, что экстремальные значения температуры и давления наблюдаются в носовой ( $T \approx 1300 \text{ К}$ ,  $p \approx 5500 \text{ Па}$ ) и донной областях течения ( $T \approx 1100 \dots 900 \text{ К}$ ,  $p \approx 3 \text{ Па}$ ). В зависимости от угла атаки температура воздуха, обтекающего верхнюю поверхность ГЛА Waverider, достаточно сильно изменяется: для угла атаки  $\alpha = 0$  температура достигает значения  $T \approx 900 \text{ К}$ ; а для угла атаки  $5^\circ$  — значения  $T \approx 500 \text{ К}$ . В обоих случаях наблюдается значительная по пространственным размерам область следа, в которой температура воздуха  $T \approx 1000 \text{ К}$ . Здесь отметим, что для более правильного описания картины течения необходимо рассматривать газ, как многокомпонентную химически реагирующую смесь.

**Выводы.** Проведено численное моделирование задачи о натекании сверхзвукового вязкого потока газа на ГЛА типа Waverider. Определены аэротермодинамические параметры газа в окрестности носа и донной области ГЛА.

Изложены различные способы геометрического моделирования трехмерных объектов и методы создания сложных моделей поверхностей перспективных ГЛА в системе САПР SolidWorks. Приведены примеры построения модели поверхности ГЛА X-43 и примеры построения моделей поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов Waverider, X-51A.

*Работа проводилась в рамках программ фундаментальных исследований РАН и выполнена в Лаборатории радиационной газовой динамики Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Surzhikov S. T. 2D CFD/RGD Model of space vehicles // Proc. of the Int. Workshop on Radiation of High Temperature Gases in Atmospheric Entry. October 2003, Lisbon, Portugal, European Space Agency, SP-533. – 2003. – P. 95–102.
2. Surzhikov S. T. Numerical Simulation of Heat Generated by Entry Space Vehicle // AIAA 2004-2379. – 2004. – 11 p.
3. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.
4. Reubush D. E., Nguyen L. T., Rausch V. L., Review of X-43A Return to Flight Activities and Current Status // AIAA 2003-7085. – 2003. – 12 p.
5. Englund W. C., Holland S. D., Cockrell C. E. et al. Propulsion System Airframe Integration Issues and Aerodynamic Database Development for the Hyper-X Flight Research Vehicle // ISOABE 99-7215. – 1999. – 12 p.
6. Charles E. Cockrell. Interpretation of Waverider performance data using computational fluid dynamics // AIAA Paper 93-2921. – 1993. – 11 p.
7. CD X-51A First Flight May 2010. V1.exb1. Pratt & Whitney A United Technologies Company.
8. SolidWorks. Практическое руководство. – М.: Бином, 2004.
9. Котов М. А., Кузенов В. В. Моделирование сложных поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в САПР SolidWorks 2007 // Труды Всеросс. шк.-семинара “Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем”. – М., 2009. – С. 271–273.
10. Котов М. А., Кузенов В. В. Геометрическое моделирование сложных поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в САПР // Сб. научн. трудов АФМ 2010.
11. Железнякова А. Л., Суржиков С. Т. Численное моделирование гиперзвукового обтекания модели летательного аппарата X-43 / Препр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. – № 950. – 2010. – С. 20–25.
12. Sapan W. J. Breathing new hope into hypersonics // AEROSPASE, November 2007. – 26 p.
13. Turbulence modeling methods for the compressible. AIAA Paper. – 1983. – No. 83-1693. Coacley T.J.
14. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 607 с.

15. М о р т и к о в Е. В. Применение метода погруженной границы для решения уравнений Навье–Стокса в областях сложной конфигурации // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т. 11. – С. 32–42.
16. В и н н и к о в В. В., Р е в и з н и к о в Д. Л. Применение декартовых сеток для решения уравнений Навье–Стокса в областях с криволинейными границами // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17. – С. 15–30.
17. В и н н и к о в В. В. Алгоритмическое описание метода погруженной границы с фиктивными ячейками // Вестник МАИ. – 2009. – Т. 16. № 6. – С. 193–198.
18. B e r g e r M., O l i g e r J. Local adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations // J. Comp. Phys. – 1984. – No. 53. – P. 484–512.
19. B e r g e r M., C o l e l l a P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // J. Comp. Phys. – 1989. – No. 82. – P. 64–84.
20. С у п л о в А. В. Разработка алгоритмов построения трехмерных локально-адаптивных сеток и их программная реализация. Дисс. ... на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. ИВМ РАН. – М., 1993. – С. 1–100.
21. B e l l J. et al. A three dimensional adaptive mesh refinement for hyperbolic conservatiin laws // SIAM. J. Sci. Statist. Comput. – 1994. – No. 15A. – P. 127–138.

Статья поступила в редакцию 26.02.2012

Михаил Алтаевич Котов окончил МИРЭА в 2011 г. Научный сотрудник лаборатории “Радиационная газовая динамика” ИПМех РАН. Автор шести научных работ в области аэромеханики и теплофизики.

M.A. Kotov graduated from the Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automatics in 2011. Researcher of Radiative Gas Dynamics Laboratory of the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Author of six publications in the field of aeromechanics and thermal physics.

Виктор Витальевич Кузенов окончил в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории “Радиационная газовая динамика” ИПМех РАН, доцент кафедры “Теплофизика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 110 научных работ в области теплофизики и радиационной газовой динамики.

V.V. Kuzenov graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1963. Ph. D. (Eng.), senior researcher of Radiative Gas Dynamics Laboratory of the Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, assoc. professor of “Thermal Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 110 publications in the field of thermal physics and radiative gas dynamics.